Lösungen zum 11. Übungsblatt zur Analysis I, Nachtrag

11.5:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, und seien $x,\ x' \in [a, b],\ x < x'$.

(1) Beh: $V_f(x) \le V_f(x')$, d.h. $V_f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.

Beweis: Ist $p : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = x$ eine beliebige Teilung von $[a, x]$, so ist $p \cup x'$ eine Teilung von $[a, x']$, und

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(t_k) - f(t_{k+1})| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_k) - f(t_{k+1})| + |f(x) - f(x')| \le V_f(x')$$

Da $V_f(x)$ das Supremum des 1. Terms in dieser Ungleichungskette ist, genommen über alle Teilungen p von $[a, b]$, folgt $V_f(x) \le V_f(x')$. $\square$

(2) Beh: $(V_f - f)(x) \le (V_f - f)(x')$, d.h. $V_f - f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.

Beweis: aus $V_f(x) + < |f(x) - f(x')| \le V_f(x')$ folgt

$$\begin{aligned}(V_f - f)(x') - (V_f - f)(x) &= (V_f(x') - V_f(x)) - (f(x') - f(x)) \\ &\ge |f(x') - f(x)| - (f(x') - f(x)) \\ &\ge 0\end{aligned}$$

$\square$

Sei $Mon[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \nearrow \text{ oder } f \searrow\}$
und $BV[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ von beschränkter Variation}\}$.
Aus (1) und (2) folgt, dass für jedes $f \in BV[a, b]$ gilt: $f = V_f - (V_f - f)$ mit $V_f, V_f - f \in Mon[a, b]$.
Da z.B. auch sin auf $[0, 2\pi]$ von beschränkter Variaton ist, aber nicht monoton, ist die Differenz von zwei monotonen Funktionen i.a. nicht mehr monoton, insbesondere ist $Mon[a, b]$ kein $\mathbb{R}$-Vektorraum, aber:
(3) $f \in BV[a, b] \subset span\,(Mon[a, b])$.
Sei umgekehrt $f \in Mon[a, b]$. Dann ist f von beschränkter Variation auf [a,b] mit $V_f(x) = |f(x) - f(a)|$ für alle $x \in [a, b]$, folglich $Mon[a, b] \subset BV[a, b]$. Insgesamt:

$$BV[a, b] = spanMon[a, b].$$