WS 1999/2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

Lösungen zum 11. Übungsblatt zur Analysis I

11.1:
Œ $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Definiert man noch $f(a-) := f(a)$ und $f(b+) := f(b)$, so gilt für alle $x \in [a,b]$ $f(x-) \leq f(x) \leq f(x+)$, mit Gleichheit überall genau dann, wenn f in x stetig ist. Umgekehrt folgt: f unstetig in $x \Leftrightarrow f(x-) < f(x+) \Leftrightarrow f(x+) - f(x-) > \frac{1}{n}$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ (Archimedes). Damit gilt

$$D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$$

Nach einem HILFSSATZ (s. Lösung zu 8.5) gilt
Die Vereinigung von höchsten abzählbar vielen höchstens abzählbaren Mengen ist höchstens abzählbar. (1)
Bleibt zu zeigen: Jedes D_n ist abzählbar.
Beweis hierzu: Sei $k \in \mathbb{N}_+$ derart, dass es $x_1, \ldots x_k \in D_n$ gibt mit $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leq b$. Dann folgt

$$f(a) \leq f(x_1-) < f(x_1+) \leq f(x_2-) < f(x_2+) \leq \ldots \leq f(x_k-) < f(x_k+) \leq f(b)$$

also

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{i=1}^{k} (f(x_i+) - f(x_i-)) \geq k \cdot \frac{1}{n}$$

d.h. $k \leq n \cdot (f(b) - f(a))$ und damit $\#D_n \leq n \cdot (f(b) - f(a)) < \infty$.
Da jedes Intervall in $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$ enthalten ist, und in jedem $[n, n+1]$ höchstens abzählbar viele Sprungstellen enthalten sind, folgt mit obigem Hilfssatz (1), dass die Behauptung auch für beliebige Intervalle richtig bleibt.

11.2:
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \text{ und alle } \bar{x} \in [a,b] \text{ mit } |x - \bar{x}| < \delta$$

Wähle N so, dass $\frac{b-a}{n} < \delta$. Da nach Voraussetzung $t_k = a + k\frac{b-a}{n}$ ist, gilt für alle $n \geq N$

$$|t_{k+1} - t_k| = \frac{b-a}{n} < \delta$$

also $|f(x) - f(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $t_k \leq x \leq t_{k+1}$ und alle k
Mit der Definition von T_n folgt $|f(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in [a,b]$, d.h. $\|f - t_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

11.3:
$f : [a,b] \longrightarrow [A,B]$ stetig und bijektiv $\underset{Vorl}{\Longrightarrow}$ f streng monoton. Sei Œ f streng monoton wachsend. Nach Vorlesung ist dann auch $f^{-1} : [A,B] \longrightarrow [a,b]$ stetig und streng monoton wachsend,

$f(a) = A$ und $f(b) = B$. Damit sind f und f^{-1} Regelfunktionen, d.h. die Integrale über f und f^{-1} existieren. Bleibt zu zeigen:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_A^B f^{-1}(y)dy = bf(b) - af(a)$$

Sei $m \in \mathbb{N}_+$ beliebig und $\varepsilon > 0$ gegeben. Anwendung von Aufgabe 11.2 liefert: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und zu jedem $n \geq N$ eine Partition $a = x_0 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b,\ \ x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ für alle k,
dazu eine Treppenfunktion $T : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$T(x) := f(x_k) \text{ für } x_k \leq x < x_{k+1},\ k = 0, \ldots, n-1,\ \ T(a) = f(a) = B$$

derart, dass $\|T - f\| < \varepsilon$.
Setze $y_k := f(x_k),\ k = 0, \ldots, n$. Da f streng monoton wachsend und $f(a) = f(x_0) = A$ sowie $f(b) = f(x_n) = B$, ist $A = y_0 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_n = B$ eine Partition von $[A, B]$. Definiere dazu die Treppenfunktion $T' : [A,B] \longrightarrow [a,b]$ durch

$$T'(y) := x_{k+1} \text{ für } y_k < y \leq y_{k+1},\ k = 0, \ldots, n-1,\ \ T'(A) = f^{-1}(A) = a$$

Zu jedem $y \in (A, B]$ gibt es ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $y_k < y \leq y_{k+1}$. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, folgt

$$x_k = f^{-1}(y_k) < f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_{k+1}) = x_{k+1}$$

und somit $|f^{-1}(y) - T'(y)| = |f^{-1}(y) - x_{k+1}| \leq |x_k - x_{k+1}| = \frac{b-a}{n}$ für alle y, insgesamt $\|f^{-1} - T'\| \leq \frac{b-a}{n}$.
Für die Integrale folgt daraus die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\int_a^b f(x)dx + \int_A^B f^{-1}(y)dy\right) - \left(\int_a^b T(x)dx + \int_A^B T'(y)dy\right)\right| \\
&\leq \left|\int_a^b (f(x) - T(x))dx\right| + \left|\int_A^B (f^{-1}(y) - T'(y))dy\right| \\
&\leq \|f - T\| \cdot (b-a) + \|f^{-1} - T'\| \cdot (B - A) \\
&\leq \varepsilon(b-a) + \frac{b-a}{n}(B - A)
\end{aligned}$$

Für die Integrale über die Treppenfunktionen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_a^b T(x)dx + \int_A^B T'(y)dy &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(y_{k+1} - y_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} y_k x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} y_k x_k + \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} y_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} y_k x_{k+1} \\
&= x_n y_n - x_0 y_0 = b(f(b) - a(f(a)
\end{aligned}$$

Aus beidem folgt

$$A := \left|\left(\int_a^b f(x)dx + \int_A^B f^{-1}(y)dy\right) - (b(f(b) - a(f(a))\right| \leq \varepsilon(b-a) + \frac{b-a}{n}(B - A)$$

für alle $n \geq N$ und damit $A \leq \varepsilon(b-a)$. Da dies wiederum für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $A = 0$.

11.4:
Zu (1):

$$\begin{aligned}\left(\exp\left(\frac{x^3 \sin x}{x^2+1}\right)\right)' &= \exp'\left(\frac{x^3 \sin x}{x^2+1}\right)\left(\frac{x^3 \sin x}{x^2+1}\right)' \\ &= \exp\left(\frac{x^3 \sin x}{x^2+1}\right) \cdot \frac{(x^3 \sin x)' \cdot (x^2+1) - (x^3 \sin x) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \exp\left(\frac{x^3 \sin x}{x^2+1}\right) \cdot \frac{(3x^2 \sin x + x^3 \cos x)(x^2+1) - (x^3 \sin x \cdot 2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \exp\left(\frac{x^3 \sin x}{x^2+1}\right) \cdot \frac{(x^4+3x^2)\sin x + (x^5+x^3)\cos x}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

Zu (2):

$$\begin{aligned}(x^x)' = (\exp(x \log x))' = \exp'(x \log x) \cdot (x \log x)' = \exp(x \log x)\left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ = x^x(\log x + 1)\end{aligned}$$

Zu (3):

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \text{ denn } |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned}x \neq 0: \quad f'(x) =& (x^2)' \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\sin \frac{1}{x}\right)' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ =& \, 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Zu (4): f kann höchstens dort differenzierbar sein, wo f stetig ist. Sei $x_n \longrightarrow x$.
$x \neq 1: f(x_n \longrightarrow x^2$, falls $x_n \in \mathbb{Q}$, aber $f(x_n) \longrightarrow 2x-1$, falls $x_n \notin \mathbb{Q}$. Wäre f stetig in x, so würde folgen, dass $x^2 = 2x - 1$, dies ist aber nur für $x = 1$ erfüllt. Widerspruch. Also ist f nicht differenzierbar in allen $x \neq 1$.

$$x = 1: \quad \frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} = \begin{cases} \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = x_n + 1 \to 2, & x_n \in \mathbb{Q} \\ 2 & x_n \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Daher existiert $\lim \frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} = f'(1) = 2$