

## Lösungen zum 2. Übungsblatt zur Analysis I

### 2.1.:

$x * y$  ist entweder  $e, x$  oder  $y$ . Ist  $x * y = x$ , so liefert die Multiplikation von links mit dem Inversen  $x'$  von  $x$  und das Assoziativgesetz

$$y = (x' * x) * y = x' * (x * y) = x' * x = e,$$

ein Widerspruch. Genauso sieht man, dass  $x * y \neq y$  ist, also gilt  $x * y = y * x = e$ . Damit ist  $G$  bereits abelsch.

$x * x$  kann nur  $e$  oder  $y$  sein, da aus  $x * x = x$  notwendigerweise  $x = e$  folgen würde. Wäre  $x * x = e$ , so wäre wegen  $x * y = e$  auch  $y = x$ . Deshalb ist  $x * x = y$  und analog  $y * y = x$ .

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $*$ | $e$ | $x$ | $y$ |
| $e$ | $e$ | $x$ | $y$ |
| $x$ | $x$ | $y$ | $e$ |
| $y$ | $y$ | $e$ | $x$ |

### 2.2.:

Vorbemerkung: Ist  $k = \{0, 1, y\}$  ein Körper mit genau drei Elementen, so ist  $(k, +)$  eine abelsche Gruppe mit genau drei Elementen und dem neutralen Element  $0$  und  $(k^*, \cdot)$  eine abelsche Gruppe mit genau zwei Elementen und dem neutralen Element  $1$ .

Will man also auf einer beliebigen dreielementigen Menge  $K := \{0, 1, y\}$  eine Addition  $+$  und eine Multiplikation  $\cdot$  so definieren, dass  $(K, +, \cdot)$  ein Körper wird mit neutralem Element der Addition  $0$  und neutralem Element der Multiplikation  $1$ , so ist wegen 2.1 die Addition folgendermaßen zu definieren:

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $+$ | $0$ | $1$ | $y$ |
| $0$ | $0$ | $1$ | $y$ |
| $1$ | $1$ | $y$ | $0$ |
| $y$ | $y$ | $0$ | $1$ |

Die Multiplikation kann man dann nur folgendermaßen definieren:

|         |     |     |     |
|---------|-----|-----|-----|
| $\cdot$ | $0$ | $1$ | $y$ |
| $0$     | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$     | $0$ | $1$ | $y$ |
| $y$     | $0$ | $y$ | $1$ |

da in  $K$  für  $y \neq 0$  stets  $y \cdot y \neq 0$  sein muss und  $y \cdot y = y$  bedeuten würde, dass  $y = 1$  ist.

Um zu zeigen, dass das so definierte Tripel  $(K, +, \cdot)$  auch tatsächlich ein Körper ist, rechnet man nach, dass  $(K, +)$  und  $(K^*, \cdot)$  abelsche Gruppen sind und dass das Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

bzw.

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

erfüllt ist (Wegen der Kommutativität der Multiplikation "·" genügt es, eines der beiden Gesetze zu zeigen.)

**2.3.:**

Ist  $(k, +, \cdot)$  ein 4-elementiger Körper mit den Elementen  $0, 1, x$  und  $y$ , wobei  $0$  bzw.  $1$  das neutrale Element der Addition bzw. Multiplikation sei, so ist  $(k^*, \cdot)$  eine 3-elementige abelsche Gruppe, also folgt mit 2.1.:

|         |     |     |     |     |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| $\cdot$ | $0$ | $1$ | $x$ | $y$ |
| $0$     | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$     | $0$ | $1$ | $x$ | $y$ |
| $x$     | $0$ | $x$ | $y$ | $1$ |
| $y$     | $0$ | $y$ | $1$ | $x$ |

Angenommen,  $1 + 1 \neq 0$ .

Dann ist  $1 + 1$  entweder gleich  $1$  oder  $x$  oder  $y$ . Aus  $1 + 1 = 0$  würde  $1 = 0$  folgen, also ist  $1 + 1 = x$  oder  $1 + 1 = y$ . Ist  $1 + 1 = x$ , dann ist  $1 + x$  entweder  $0, 1$  oder  $y$ . Der Fall  $1 + x = 1$  scheidet aus, da sonst  $x = 0$ . Wäre  $1 + x = 0$ , so wäre  $x = -1$ , also  $y = x^2 = (-1)^2 = 1$ . Wäre  $1 + x = y$ , so wäre  $1 = x \cdot y = x^2 + x = x^2 + (1 + 1)$ , d.h.  $x^2 = -1$ . Daraus folgte aber nach Verknüpfungstafel der Multiplikation  $1 = (x^2)^2 = y \cdot y = x$ , Widerspruch! Also ist  $1 + 1 \neq x$ . Ganz analog (vertausche  $x$  und  $y$ ) folgt, da  $1 + 1 \neq y$ . Folglich ist  $1 + 1 = 0$ .

Aus  $1 + 1 = 0$  folgt durch Multiplikation mit  $x$  bzw.  $y$  sofort  $x + x = y + y = 0$ . Wegen  $1 + 1 = 0$  und  $x \neq 1$  ist  $1 + x \neq 0$ . Wegen  $1, x \neq 0$  kann  $1 + x$  weder  $x$  noch  $1$  sein. Folglich gilt  $1 + x = y$ . Analog sieht man, dass  $1 + y = x$ . Nun folgt schon  $x^2 + x + 1 = y + (1 + x) = y + y = 0$ , ebenso  $y^2 + y + 1 = x + (1 + y) = x + x = 0$ , d.h. die Körperelemente  $x, y$  sind zwei verschiedene Lösungen der Bestimmungsgleichung  $z^2 + z + 1 = 0$ . ( $0$  und  $1$  sind keine Lösungen, wie Einsetzen zeigt.) Beachte, dass diese Bestimmungsgleichung im Körper der reellen Zahlen keine Lösung besitzt!

Zusatzbemerkung: Mit analogen Techniken wie zum Beweis von  $1 + x = y$  findet man, dass  $1 + y = x, x + 1 = y, y + 1 = x, x + y = y + x = 1$ . Damit hat die vollständige Tafel der Addition notwendig folgende Gestalt:

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $+$ | $0$ | $1$ | $x$ | $y$ |
| $0$ | $0$ | $1$ | $x$ | $y$ |
| $1$ | $1$ | $0$ | $y$ | $x$ |
| $x$ | $x$ | $y$ | $0$ | $1$ |
| $y$ | $y$ | $x$ | $1$ | $0$ |

insbesondere ist ein Körper mit 4 Elementen in seiner Struktur eindeutig bestimmt. Die Existenz zeigt man entweder sehr mühsam durch einfaches Nachprüfen sämtlicher Körpergesetze anhand der hier vorliegenden Tafeln, oder ganz kurz und elegant mit den Mitteln der späteren Vorlesung 'Algebra'.

**2.4.:**

By 1.1. and the additional trivial remark  $A \Delta B = B \Delta A$  it follows straightforward that  $(PX, +)$  is an abelian group with the empty-set  $\emptyset$  as neutral element.

Clearly the multiplication  $(A, B) \mapsto A \cdot B := A \cap B$  is associative, commutative and has the whole set  $X$  as neutral element.

If  $A$  or  $B$  differs from  $X$  then obviously  $A \cdot B = A \cap B \neq X$ , so there are no inverses in general, if  $X$  is not a singleton (=1-elementige Menge  $X = \{a\}$ ), hence  $(PX, +, \cdot)$  is not a field as soon as  $X$  is not a singleton.

On the other hand if  $X$  is a singleton,  $(PX, +, \cdot)$  is a field of two elements (which is in fact isomorphic to the field  $\mathbb{F}_2$ ).

Remark, that distributivity is in both cases guaranteed by 1.1., too.