Lösungen zum 3.Übungsblatt zur Analysis I

3.1.:

Zu (1): Sei $T := \{n \in \mathbb{N} | \text{es gilt } \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2\}$.
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 = 0 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$, also ist $0 \in T$.
Induktionsannahme: Gegeben sei ein $n \in T$. Zu zeigen: Dann ist auch $n+1 \in T$.
Beweis hierfür: Wegen $n \in T$ gilt $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \frac{n^2}{4}(n+1)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \cdot \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = \\ &= (n+1)^2 \cdot \frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 = \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \cdot ((n+1)+1)^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Formel gilt für $n+1$, d.h. $n+1 \in T$. Daraus folgt $T = \mathbb{N}$, was zu zeigen war.

Zu (2): Sei $T := \{n \in \mathbb{N} | n^2 \leq 2^n\}$. Offenbar sind $0, 1, 2 \in T$, $3 \notin t$. Ausserdem ist $4 \in T$ (= Induktionsanfang).
Induktionsannahme: Sei $n \in T$, $n \geq 4$. Dann ist $n^2 \leq 2^n$, also $2^{n+1} \geq 2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, da $n^2 \geq 2n+1$ für $n \geq 4$. Daher ist $(n+1) \in T$ und damit $\{n \in \mathbb{N} | n \geq 4\} \subset T$, was zu zeigen war.

Zu (3): Sei $T := \{n \in \mathbb{N} | \prod_{k=0}^{n}(1 + x_x) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$, falls alle $x_k \geq 0$ oder falls $-1 < x_k \leq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n\}$.
Induktionsanfang:
$1 \in T$, denn $\prod_{k=1}^{1}(1 + x_k) = 1 + x_k = 1 + \sum_{k=1}^{1} x_k$.
Induktionsannahme: Gegeben sei ein $n \in T$.
Zu zeigen: Daraus folgt $n+1 \in T$.
Beweis hierfür: Seien $x_1, \ldots, x_{n+1}$ alle ≥ 0 oder gelte $-1 < x_k \leq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$.
Dann ist

$$1 + x_{n+1} > 0 \tag{1}$$
$$x_k x_{n+1} \geq 0 \text{ für alle } k = 1, \ldots, n \tag{2}$$

Wegen $n \in T$ und (1) gilt $\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) \geq (1+\sum_{k=1}^{n} x_k)(1+x_{n+1})$. Die rechte Seite dieser Ungleichung ist nach dem Distributivgesetz gleich $1+\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k x_{n+1}$ und lässt sich wegen (2) nach unten abschätzen durch $1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k$, also ist $n+1 \in T$. Damit folgt $\mathbb{N}_+ \subset T$, was zu beweisen war.

3.2.:

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

Dies führt zu der Vermutung $1 + 3 + 5 + \ldots + (2(n-1)+1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $T := \{n \in \mathbb{N}_+ | 1 + 3 + 5 + \ldots (2(n-1)+1) = n^2\}$.

Offenbar ist $1 \in T$ (=Induktionsanfang).
Induktionsannahme: Sei $n \in T$, also $1 + 3 + 5 + \ldots (2(n-1)+1) = n^2$.
Addition von $2n+1$ auf beiden Seiten zusammen mit der binomischen Formel liefert hieraus $n+1 \in T$, d.h. $T = \mathbb{N}_+$.

3.3.:
Sei $W := \{n \in \mathbb{N} | \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \text{ ist rational}\}$.
Behauptung: $W = \{0\}$, d.h. $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ ist irrational für alle $n \in \mathbb{N}^+$.
Beweis: Es ist $0 \in W$, also $\{0\} \subset W$. Sei umgekehrt irgendein $n \in W$ gegeben. Dann ist $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ rational, also auch $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = n + \sqrt{n(n+1)} + n + 1$ rational und somit $\sqrt{n(n+1)}$ rational.
Sei $\sqrt{n(n+1)} = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, p und q ohne gemeinsame Primfaktoren. Wegen $q^2 n(n+1) = p^2$ ist dann p^2 ein Teiler von $n(n+1)$, d.h. $n(n+1) = m \cdot p^2$, eingesetzt $q^2 m p^2 = p^2$, $q^2 m = 1$ mit einer natürlichen Zahl $m \geq 1$. Daraus folgt $q = 1$, also

$$n(n+1) = p^2 = \prod_{i=0}^{r} p_i^{2a_i}, \text{ wobei } p = \prod_{i=0}^{r} p_i^{a_i}$$

die Primfaktorzerlegung von p ist. Da kein p_i zugleich Teiler von n und $n+1$ sein kann (da es sonst Teiler von $(n+1) - n = 1$ wäre), folgt, dass jedes p_i in der $2a_i$-ten Potenz ein Teiler von n oder aber von $n+1$ ist. Und andere Primteiler besitzen n und $n+1$ nicht. Damit sind alle Primteiler von n wie von $n+1$ in gerader Potenz in diesen Zahlen enthalten, d.h., dass sowohl n als auch $n+1$ selber Quadratzahlen sind, etwa

$$n = u^2 \quad \text{und} \quad n+1 = v^2 \quad \text{mit } 0 \leq u < v$$

Hieraus folgt $1 = (n+1) - n = v^2 - u^2 = (v+u)(v-u)$. Als Teiler von 1 müssen die natürlichen Zahlen $v+u$ und $v-u$ notwendig beide gleich 1 sein. Daraus folgt $u = 0$ und $n = 0$, was zu zeigen war.

3.4.:

Zu a): $2x^2 + 5x - 3 < 0$ iff $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 0$
iff $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} < 0$
iff$\left(\left(x + \frac{5}{4}\right) + \frac{7}{4}\right)\left(\left(x + \frac{5}{4}\right) - \frac{7}{4}\right) < 0$
iff $(x+3)(x - \frac{1}{2}) < 0$
iff $(x - \frac{1}{2}) < 0 < x + 3$.
iff $-3 < x < \frac{1}{2}$

Zu b): Since $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$ the inequality $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \leq \frac{a+b}{2}$ is straightforward with equality iff (= if and only if) a equals b.
Multiplying this inequality by $\sqrt{ab}$ yields finally $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ with equality again iff a equals b.