WS 1999/2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

## Lösungen zum 4. Übungsblatt zur Analysis I

**4.1.:**

Behauptung: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Aussage:

(*) Zu jeder endlichen Menge $X$ mit $\#X = N+1$ und jeder Teilmenge $\emptyset \neq A \subset X$ existiert eine Bijektion $\varphi : \{0, 1, \dots, N\} \mapsto X$ und ein $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ derart, dass $\varphi|_{\{0,1,\dots k\}}$ eine Bijektion von $\{0, \dots, k\}$ auf A ist. Insbesondere ist A endlich und $\#A \leq \#X$.

Beweis durch Induktion nach $N$:
Sei $T := \{N \in \mathbb{N} |$ Behauptung (*) gilt für $N\}$. Im Falle $N = 0$ ist $\#X = 1$ und wegen $A \neq \emptyset$ gilt $A = X$. Mit $k = 0$ gilt (*), also ist $0 \in T$.
Induktionsannahme: Sei $N \in T$. Zu zeigen: $N + 1 \in T$.
Beweis hierfür: Sei $X$ endlich, $\#X = N + 2$ und $\emptyset \neq A \subset X$. Dann gibt es zunächst eine Bijektion $\pi : \{0, \dots, N + 1\} \mapsto X$.
Betrachte $x' := \pi(N + 1)$.
1. Fall: $A = \{x'\}$. Dann definiere eine Bijektion $\varphi : \{0, \dots, N + 1\} \mapsto X$ wie folgt:

$$\varphi(0) := x',\ \varphi(N + 1) := \pi(0),\ \varphi(j) := \pi(j) \text{ sonst (d.h. für } j = 1, \dots, N)$$

Nach Konstruktion ist $\varphi|_{\{0\}}$ eine Bijektion von $\{0\}$ auf $A$, insbesondere A endlich und $\#A = 1 \leq N + 1 = \#X$.
2. Fall: $A \neq \{x'\}$. Dann definiere $X' := X \backslash \{x'\}$, $A' := A \cap X'$ und $\pi' := \pi|_{\{0,\dots,N\}}$. Nach Konstruktion ist $\pi'$ eine Bijektion von $\{0, \dots, N\}$ auf $X'$ und $\emptyset \neq A' \subset X'$. Folglich ist $\#X' = N + 1$ und mit der Induktionsannahme $N \in T$ folgt aus (*): Es gibt eine Bijektion $\varphi' : \{0, \dots, N\} \mapsto X'$ und ein $k' \leq N$ derart, dass $\varphi'|_{\{0,\dots,k'\}}$ eine Bijektion von $\{0, \dots, k'\}$ auf $A'$ ist. Erweitere $\varphi'$ zu einer Bijektion $\varphi : \{0, \dots, N + 1\} \mapsto X$ wie folgt:
Falls $x' \notin A$ setze

$$\varphi(N + 1) := x' \text{ und } \varphi(j) := \varphi'(j) \text{ sonst (d.h. für } j = 1, \dots, N)$$

Falls $x' \in A$ setze

$$\varphi(k' + 1) := x',\ \varphi(N + 1) := \varphi'(k' + 1)$$

$$\text{und } \varphi(j) := \varphi'(j) \text{ sonst (d.h. für } j = 0, \dots, k \text{ und für } j = k' + 2, \dots, N)$$

Wenn man nun $k := k'$ setzt, falls $x' \notin A$, bzw. $k := k' + 1$, falls $x' \in A$, so ist stets $k \leq N + 1$, $\varphi|_{\{0,\dots,k\}}$ eine Bijektion von $\{0, \dots, k\}$ auf A, also insbesondere A endlich und $\#A = k + 1 \leq N + 2 = \#X$.
Hiermit folgt $N + 1 \in T$. Per Induktion ist $T = \mathbb{N}$, d.h. $(*)$ gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$.

Im Spezialfall $A = \emptyset$ ist $A$ per Definition endlich und $\#A = 0 \leq \#X$. Damit ist Aufg.4.1 bis inclusive Teil (1) bewiesen.

Zu (2): Zu zeigen: Für endliche $X$, $Y$ gilt stets $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$.
Beweis hierfür: Ist eine der Mengen $X$, $Y$ leer, so ist auch der Durchschnitt $X \cap Y$ leer, also gilt die Gleichung $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$ trivialerweise. Seien nun $X$, $Y$ beide nicht leer.
1. Fall: $X \cap Y = \emptyset$. Dann existieren Bijektionen $\pi : \{0, \ldots, N\} \mapsto X$ und $\pi' : \{0, \ldots, M\} \mapsto Y$. Definiere eine Abbildung $\varphi : \{0, \ldots, N, N+1, \ldots, N+M+1\} \mapsto X \cup Y$ wie folgt:

$$\varphi(j) := \pi(j) \text{ für } j = 0, \ldots, N \text{ und } \varphi(j) := \pi'(j - (N+1)) \text{ für } j = N+1, \ldots, N+M+1$$

Dies ist eine (wohldefinierte) Bijektion auf $X \cup Y$, also gilt $\#(X \cup Y) = N + M + 1 + 1 = (N+1) + (M+1) = \#X + \#Y$, kurz:

$$(**) \quad \#(X \cup Y) = \#X + \#Y, \text{ falls } X,\ Y \text{ disjunkt und beide endlich sind.}$$

Wegen $\#(X \cap Y) = 0$ ist damit die Behauptung $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$ im 1. Fall bewiesen.

2. Fall: $X \cap Y \neq \emptyset$. Setze $A := X \cap Y$ und $B := \mathcal{C}_Y(X \cap Y) = Y \backslash X$. Nach (1) sind $A$ und $B$ als Teilmengen der endlichen Menge $Y$ beide endlich. Da $Y$ ihre disjunkte Vereinigung ist, folgt nach (**): $\#Y = \#(X \cap Y) + \#(Y \backslash X)$, also $\#(Y \backslash X) = \#Y - \#(X \cap Y)$. Andererseits ist $X \cup Y$ die disjunkte Vereinigung der endlichen Mengen $X$ und $Y \backslash X$. Wiederum nach (**) folgt somit

$$\#(X \cup Y) = \#X + \#(Y \backslash X) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y),$$

was zu beweisen war.

Zu (3): Ist $X$ oder $Y$ leer, so ist auch $X \times Y$ leer und damit $\#(X \times Y) = \#X \cdot \#Y = 0$. Seien nun $X$, $Y$ beide nicht leer. Sei $q := X \times Y \mapsto Y$ die Projektion $(x, y) \longmapsto y$ auf die 2. Koordinate. Dann ist $X \times Y$ die disjunkte Vereinigung der Fasern $q^-(y)$, $y \in Y$, $q^-(y) = \{(x, y) | x \in X\}$. Weil die Abbildung $\{(x, y) | x \in X\} \mapsto X$, $(x, y) \longmapsto x$, eine Bijektion von $q^-(y)$ auf $X$ ist, ist $q^-(y)$ endlich und $\#q^-(y) = \#X$. Mit (**) folgt $\#X \times Y = \sum_{y \in Y} \#q^-(y) = \sum_{y \in Y} \#X = \#Y \cdot \#X$.

**4.2.:**
Zu a): Bei der Vorwahl bietet die 1. Ziffer keinerlei Auswahl, die 2. Ziffer erlaubt 9 Wahlmöglichkeiten, die 3., 4. und 5. Ziffer jeweils 10 Wahlmöglichkeiten. Da diese voneinander unabhängig sind (Ziffernwiederholung ist zugelassen), gibt es $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^3$ mögliche verschiedene Vorwahlen.
Für jede Vorwahl eröffnen sich beim Anschluss 9 Möglichkeiten bei der 1. Ziffer, sowie je 10 Möglichkeiten bei der 2., 3., 4. und 5. Ziffer, dies unabhängig voneinander. Pro Vorwahl ergeben sich somit $9 \cdot 10^4$ mögliche Anschlüsse, macht also insgesamt

$$9 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^4 = 8{,}1 \cdot 10^8 \text{ mögliche Telefonanschlüsse.}$$

Zu b): Bei zusätzlich benutztem $*$ als einer weiteren Ziffer erhöht sich bei denjenigen Ziffern, wo Wahlmöglichkeiten bestehen, die Anzahl dieser Möglichkeiten jeweils um 1, also ergibt die analoge Rechnung

$$10 \cdot 11^3 \cdot 10 \cdot 11^4 = 10^2 \cdot 11^7 \approx 1,95 \cdot 10^9 \text{ mögliche Telefonanschlüsse.}$$

Hingegen ergeben 7-stellige Anschlüsse bei Beibehaltung der Ziffern 0 bis 9 und den bisherigen Vorwahlen gegenüber a) zusätzlich je 10 Wahlmöglichkeiten bei der 6. und 7. Ziffer, also insgesamt analog zu a)

$$9 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^6 = 8,1 \cdot 10^{10} \text{ mögliche Telefonanschlüsse.}$$

Dies ist also im Vergleich zur Einführung von $*$ die stärkere Kapazitätserweiterung.

**4.3.:**
Zu a): Sei $0 \leq k \leq n-1$, d.h. insbesondere $n - k \neq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!} = \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-(k+1))!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-(k+1))!} \cdot \frac{n+1}{(n-k)(k+1)} = \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Zu b): Sei $T := \left\{n \in \mathbb{N} \mid \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \text{ gilt für alle } 0 \leq k \leq n\right\}$
Für $n = k = 0$ ist $\binom{0}{0} = 1 = \binom{1}{1}$, also ist $0 \in T$.
Sei nun $n \in T$. Zu zeigen: $n + 1 \in T$, d.h. zu zeigen:

$$(*) \quad \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1} \quad \text{gilt für alle } k = 0, \ldots, n+1$$

Für $0 \leq k \leq n$ ist wegen $n \in T$ die linke Seite von $(*)$ gleich $\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}$ und das ist nach a) gleich $\binom{n+2}{k+1}$, was zu zeigen war. Für $k = n+1$ besagt die Gleichung $(*)$ einfach $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n+2}{n+2}$, was offensichtlich gilt. Damit folgt $n + 1 \in T$ und per Induktion $T = \mathbb{N}$.

**4.4.:**
Let $T := \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 2,\ a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + b^{m-1}) \text{ holds }\}$.
For $m = 2$ the equation reduces to $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, hence $2 \in T$.
Now suppose $m \geq 2$ and $m \in T$. Write

$$\begin{aligned}
a^{m+1} - b^{m+1} &= a^{m+1} - a^m b + a^m b - b^{m+1} = a^m(a-b) + b(a^m - b^m) = \\
&= a^m(a-b) + b(a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + b^{m-1})
\end{aligned}$$

because of $n \in T$, hence

$$a^{m+1} - b^{m+1} = (a-b)(a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \ldots + b^m)$$

and $m+1 \in T$. Therefore $T = \mathbb{N}$.
If $b$ is a zero of $p$, then $p(t) = 0$ and

$$p(t) = p(t) - p(b) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t^k - b^k)$$

where each $t^k - b^k$ is the product of $(t-b)$ with a polynomial function $q_k(t) = t^{k-1} + bt^{k-2} + \ldots + b^{k-1}$ of degree $k-1$. Hence if p is a polynomial function of degree n and b a zero of p, then

$$p(t) = (t-b)q(t) \qquad \text{, where q is a polynomial of degree } n-1$$

Now if $b'$ is a zero of $p$ different from $b$, then $0 = p(b') = (b'-b)(q(b')$ and it follows that $b'$ is necessarily a zero of $q$. On the other hand any zero of $q$ is a zero of $p$, too. It follows that $p$ has at most one more zero than $q$.
A polynomial of degree 0 (i.e. a constant function) has at most 0 (i.e. no) zeros. By induction a of polynomial of degree $n-1$ has at most $n-1$ zeros. Hence $p$ has at most $n$ zeros.

Remark that the arguments go through in any field $k$.