Lösungen zum 5. Übungsblatt zur Analysis I

5.1.:
Zu (1): Sei o.B.d.A. $x \geq y$, also $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+(x-y)) = x = \max\{x,y\}$.
Zu (2): Es gilt

$$\begin{aligned} 1+|x| &= 1+|y+(x-y)| \leq 1+|y|+|x-y| \leq \\ &\leq 1+|y|+|x-y|+|y||x-y| = (1+|y|)(1+|x-y|) \end{aligned}$$

Division der Ungleichung durch $(1+|y|)(\geq 0)$ liefert die Behauptung.
Genauso beweist man die Formel $\min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.
Zu (3): Multiplikation der zu beweisenden Ungleichung mit dem (positiven) Hauptnenner führt zu der äquivalenten Ungleichung

$$|x+y|(1+|x|)(1+|y|) \leq |x|(1+|y|)(1+|x+y|) + |y|(1+|x|)(1+|x+y|)$$

Ausmultiplizieren nach dem Distributivgesetz und anschliessendes Subtrahieren gleicher Summanden auf beiden Seiten führt weiter zur äquivalenten Ungleichung

$$|x+y| \leq |x|+|y|+|x||y||x+y|+2|x||y|.$$

Diese aber ist sicher richtig, da ja stets $|x+y| \leq |x|+|y|$ gilt. Damit folgt die Behauptung.

5.2.:
Zu (1): Kürzen des Bruchs durch n^4 und Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte liefert den Grenzwert $-\frac{5}{2}$.
Zu (2): Sei $a_n := \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. a_n ist ein Produkt aus zwei Faktoren, von denen der eine (nämlich $\sqrt{n}$) gegen ∞ divergiert, während der andere (nämlich $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$) gegen Null strebt. Das Konvergenzverhalten von a_n ist also nicht aus dem der einzelnen Faktoren errechenbar.
Erweitern mit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ liefert für $n \geq 1$

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

Wegen $1 < \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n}$ hat $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ den Grenzwert 1, also hat a_n den Grenzwert $\frac{1}{2}$.
Zu (3): Nach der Bernoullischen Ungleichung ist $(1+\frac{1}{n})^n \geq 1+1$, folglich

$$0 \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{1+1}\right)^n.$$

Daher ist $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ eine Nullfolge.
Zu (4): Wegen

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1$$

ist die Folge unbeschränkt und daher nicht konvergent.

5.3.:
Da (a_n) gegen a_* konvergiert, ist die Folge beschränkt und es gibt ein $C \geq 0$, so dass $|a_n| \leq C$ für alle n und $|a_*| \leq C$.
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_k - a_*| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq N$.
Wegen $a_* = \frac{n+1}{n+1} \cdot a_*$ gilt

$$M_n - a_* = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}(a_k - a_*)$$

$$|M_n - a_*| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |a_k - a_*|$$

Sei nun $n \geq N$. Für $k = 0, \ldots, N-1$ schätze $|a_k - a_*| \leq |a_k| + |a_*| \leq 2C$, für $k \geq N$ hingegen $|a_k - a_*| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} |M_n - a_*| &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N-1} 2C + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1} N \cdot 2C + \frac{1}{n+1}(n-N)\frac{\varepsilon}{2} < \\ &< \frac{N \cdot 2C}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Da $\left(\frac{N \cdot 2C}{n+1}\right)$ wegen des konstanten Zählers eine Nullfolge bildet, gibt es ein $N' \geq N$, so dass $\frac{N \cdot 2C}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N'$. Insgesamt ist dann für alle $n \geq N'$

$$|M_n - a_*| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h. (M_n) konvergiert ebenfalls gegen a_*.

5.4.:
For $\varepsilon > 0$ there exists $N \in \mathbb{N}$ such that

$$|a_n - a_*| < \varepsilon \qquad \text{for all } n \geq N.$$

Since π is a bijection of $\mathbb{N}$, there are only finitely many $n \in \mathbb{N}$ such that $\pi(n) < N$. Hence there exists $M := max\{n \in \mathbb{N} \mid \pi(n) < N\}$. For all $n \geq M+1$ we have $\pi(n) \geq N$, hence

$$|a_{\pi(n)} - a_*| < \varepsilon \qquad \text{for all } n \geq M+1,$$

i.e. $n \longmapsto a_{\pi(n)}$ converges as well to a_*.