WS 1999/2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

Lösungen zum 6. Übungsblatt zur Analysis I

6.1.:
NachVorlesung gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \uparrow e \text{ und } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow e,$$

$$\text{Folglich } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{1}$$

$$\text{Sei } T := \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}.$$

Für $n = 2$ gilt wegen $2 < e < 4$

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} = \frac{4}{e} < 2 = n! < \frac{8}{e} = \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

also $2 \in T$. Sei nun $n \geq 2$ und $n \in T$. Dann gilt

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n^n}{e^{n-1}}(n+1) < (n+1)! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}(n+1)$$

Damit $n+1 \in T$, genügt es zu zeigen, dass

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \leq \frac{n^n}{e^{n-1}}(n+1) \text{ und } \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}(n+1) \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \quad | \cdot \frac{e^n}{n^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < e \text{ und} e < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \text{ und } e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

was nach (1) gilt. Damit ist $T \supset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$.
Berechnung der Grenzwerte: (2) gilt also für alle $n \geq 2$. Monotonie der n-ten Wurzel liefert daraus

$$\sqrt[n]{\frac{n^n}{e^{n-1}}} < \sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\sqrt[n]{e}}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{e}}{e} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[n]{e}}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{e}}{e}$$

Nach Vorlesung gilt $\lim \frac{\sqrt[n]{e}}{e} = \frac{1}{e}$ und $\lim \frac{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{e}}{e} = \frac{1}{e}$.

Mit STAB folgt $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ existiert und ist gleich $\frac{1}{e}$.

Aus (3) folgt durch Kehrwertbildung $\frac{e}{n\sqrt[n]{e}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{e}{n\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{e}}$.

Nach Vorlesung und STAB gilt

$$\lim \frac{e}{n\sqrt[n]{e}} = \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{e}{\lim \sqrt[n]{e}} = 0 \cdot \frac{e}{1} = 0 \text{ und } \lim \frac{e}{n\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{e}} = \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{e}{\lim \sqrt[n]{n} \cdot \lim \sqrt[n]{e}} = 0 \cdot \frac{e}{1 \cdot 1} = 0.$$

Mit STAB folgt $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ existiert und ist $= 0$.

6.2.:
Nach Voraussetzung gibt es $\varphi, \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, beide streng monoton wachsend, so dass $\beta = \alpha \circ \varphi$ und $\alpha = \beta \circ \psi$. Zum Beweis von $\alpha = \beta$ genügt es zu zeigen, dass $\psi = id_{\mathbb{N}}$. Beweis hierfür: $\alpha(n) = \beta \circ \psi(n) = (\alpha \circ \varphi) \circ \psi(n) = \alpha(\varphi \circ \psi(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen α injektiv folgt hieraus

$$n = \varphi(\psi(n)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Es gilt aber $\varphi(n) \geq n$ und $\psi(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn sei $T := \{n \in \mathbb{N} | \varphi(n) \geq n\}$. Wegen $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(0) \geq 0$, also $0 \in T$. Aus $n \in T$ und der streng wachsenden Monotonie von φ folgt $n \leq \varphi(n) < \varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, folglich $n+1 \leq \varphi(n+1)$ und somit $n+1 \in T$, d.h. $T = \mathbb{N}$. Analog für ψ.
Mit (4) folgt $\Rightarrow n = \varphi(\psi(n)) \geq \psi(n) \geq n$ und somit $\psi(n) = n$ für alle n, was zu zeigen war.

6.3:
Sei

$$x_0 := 1 \text{ und } x_n := \frac{2 + x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}, \quad n \geq 1$$

Durch vollständige Induktion sieht man leicht, dass $x_n > 0$ für alle n. Daraus und aus

$$x_n = 1 + \frac{1}{1 + x_{n-1}}$$

folgt zunächst

$$1 < x_n = 1 + \frac{1}{1 + x_{n-1}} < 2 < 1 + x_n \qquad \text{für alle } n \geq 1$$

$$x_{n+k} - x_n = 1 + \frac{1}{1 + x_{n-1+k}} - 1 - \frac{1}{1 + x_{n-1}} = \frac{x_{n-1} - x_{n-1+k}}{(1 + x_{n-1+k})\,(1 + x_{n-1})} \quad \text{für alle } k \geq 1$$

Die Faktoren im Nenner des Bruchs rechtsseits sind beide > 2, folglich

$$|x_{n+k} - x_n| < \frac{1}{4}|x_{n-1+k} - x_{n-1}|$$

Durch vollständige Induktion nach n folgt wegen $|x_n| < 2$ für alle n

$$|x_{n+k} - x_n| < \left(\frac{1}{4}\right)^n |x_k - x_0| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (|x_k| + |x_0|) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{für alle } n \geq 1$$

Wegen $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ existiert zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{N-1} < \epsilon$ für alle $n \geq N$, $k \geq 0$, d.h. (x_n) ist Cauchy-Folge und hat somit einen Grenzwert a, der der Gleichung $a = 1 + \frac{1}{1+a}$ genügt. Daraus folgt $a - 1 = \frac{1}{1+a}$, also $(a-1)(a+1) = 1$, $a^2 = 2$. Wegen $x_n > 1$ ist $a \geq 1$, also $a = \sqrt{2}$.

6.4:
As in 6.3. it follows that $|x_{n+k} - x_n| = |f(x_{n-1+k}) - f(x_{n-1})| \leq \Delta |x_{n-1+k} - x_{n-1}| \leq \Delta^n (b-a)$. Because of $0 \leq \Delta < 1$ (x_n) is a Cauchy sequence with limit $a \leq x_* \leq b$. For every $\epsilon > 0$ there exists $N \in \mathbb{N}$ with $|x_{n-1} - x_*| < \epsilon$ for all $n \geq N$. Hence

$$|x_n - f(x_*)| = |f(x_{n-1}) - f(x_*)| \leq \Delta |x_{n-1} - x_*| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

i.e. $f(x_*)$ is another limit of the sequence (a_n). By uniqueness of limits $x_* = f(x_*)$, so x_* is a fixed point of f. If x^* is another fixed point of f, $x^* \neq x_*$, then

$$|x^* - x_*| = |f(x^*) - f(x_*)| \leq \Delta |x^* - x_*| < |x^* - x_*|,$$

a contradiction.