Lösungen zum 7. Übungsblatt zur Analysis I, Nachtrag

7.5.:
Sei $L := \lim \frac{a_n}{b_n}$. Sei $A_n := \sum_{k=0}^n a_n$, $B_n := \sum_{k=0}^n b_n$. Zu zeigen: $\lim \frac{A_n}{B_n} = L$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass $\left|\frac{a_k}{b_k} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq N$.

$$\Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_k}{b_k} < L + \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } k \geq N \quad | \cdot b_k > 0$$

$$\Rightarrow b_k \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) < a_k < b_k \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ für alle } k \geq N$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=N}^n b_k\right)\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \sum_{k=N}^n a_k < \left(\sum_{k=N}^n b_k\right)\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{1}$$

Setze $R_n := \sum_{k=N}^n$. Dann folgt aus (1), dass sich $\frac{A_n}{B_n}$ wie folgt nach beiden Seiten abschätzen lässt:

$$\frac{A_{N-1} + R_n\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{B_{N-1} + R_n} < \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_{N-1} + \sum_{k=N}^n a_k}{B_{N-1} + R_n} < \frac{A_{N-1} + R_n\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{B_{N-1} + R_n}$$

Wegen $b_n > 0$ gilt $R_n \uparrow$. Da $\sum_{k \geq 0} b_k$ nach Voraussetzung divergent ist, ist die Folge (R_n) nach oben unbeschränkt, also $\lim \frac{1}{R_n} = 0$. Kürzen der Brüche durch R_n ergibt

$$\frac{\frac{A_{N-1}}{R_n} + \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\frac{B_{N-1}}{R_n} + 1} \leq \frac{A_n}{B_n} \leq \frac{\frac{A_{N-1}}{R_n} + \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\frac{B_{N-1}}{R_n} + 1}$$

Da A_{N-1} und B_{N-1} Konstante sind, folgt weiter: Der linke Term in der Ungleichungskette strebt für $n \to \infty$ gegen $\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, der rechte Term gegen $\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Daher gibt es ein $N_* \geq N$, so dass der linke Term $\geq (L - \varepsilon)$ und der rechte Term $\leq (L + \varepsilon)$ ist für alle $n \geq N_*$. Folglich gilt

$$L - \varepsilon \leq \frac{A_n}{B_n} \leq L + \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_*.$$

Daraus folgt $\lim \frac{A_n}{B_n} = L$, was zu zeigen war.

Der Spezialfall $b_n = 1$ für alle n liefert erneut das Ergebnis von Aufgabe 5.3 (Cauchy'scher Granzwertsatz):

$$\text{Falls } \lim a_n \text{ existiert, so gilt } \lim \frac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1} = \lim a_n.$$