Lösungen zum 7. Übungsblatt zur Analysis I

7.1.:
Zu a): Reihe konvergent nach dem Quotientenkriterium: Sei $\gamma_n := \frac{n^6}{3^n}$. Dann gilt

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{(n+1)^6 \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n^6} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^6 \to \frac{1}{3}$$

Zu $\Delta = \frac{2}{3} < 1$ gibt es daher ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leq \Delta \text{ für alle } n \geq N.$$

Zu b): Reihe divergent, da

$$\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to \frac{1}{2},$$

also die Summanden keine Nullfolge bilden.
Alternative Lösung:

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

ist konvergent nach Leibniz. Würde die gegebene Reihe konvergieren, so auch die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2}$, deren Summanden keine Nullfolge bilden, ein Widerspruch.
Zu c): Sei $\gamma_n := \frac{2n+1}{n(n+1)}$. Da (γ_n) eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach Leibniz. Beweis:
Folge monoton fallend:

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} = \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{2n+3} = \frac{2n^2+5n+2}{2n^2+3n} > 1$$

d.h. $\gamma_n > \gamma_{n+1}$.
Folge konvergent gegen 0:

$$\gamma_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{0+0}{1+0} = 0$$

Zu d): Reihe konvergent nach dem Majorantenkriterium, denn

$$\frac{\sqrt{n}}{e^{n^2}} \leq \frac{\sqrt{n}}{e^{2n}} = \left(\frac{1}{e}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{1+n} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

und die geometrische Reihe $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ ist konvergent.

7.2.:
(a_{6n}) ist Teilfolge von (a_{2n}) und (a_{3n}). Daher ist $\lim a_{6n} = \lim a_{2n} = \lim a_{3n}$.
(a_{6n+3}) ist Teilfolge von (a_{3n}) und (a_{2n+1}). Deshalb ist $\lim a_{6n+3} = \lim a_{3n} = \lim a_{2n+1}$. Alle drei Teilfolgen (a_{2n}), (a_{3n}), (a_{2n+1}) haben daher denselben Grenzwert a. Wegen $\mathbb{N} = \mathbb{N}_{gerade} \cup \mathbb{N}_{ungerade}$ ist a auch der Grenzwert der Folge (a_n).

7.3.:
Es genügt, ein $c \geq 1$ zu finden, also sei im Folgenden Œ $x \geq 1$. Im Falle $\alpha < 0$ ist $0 < x^\alpha = x^{-|\alpha|} \leq 1 \leq x^{|\alpha|}$, ausserdem $exp(x) > 0$. Wähle nach Archimedes ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq |\alpha|$. Wegen

$$exp(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > 0$$

gilt nun für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{x^\alpha}{exp(x)}\right| \leq \frac{x^{|\alpha|}}{exp(x)} \leq x^{|\alpha|} \cdot \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \leq x^n \cdot \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x}$$

Nun wähle $c \geq 1$ mit $c \geq \frac{(n+1)!}{\varepsilon}$. Für alle $x \geq c$ folgt dann $\frac{(n+1)!}{x} \leq \varepsilon$, was zu zeigen war.

7.4.: Take $\sum_{k\geq 1} a_k =: s$ and $A_n := a_1 + 2a_2 + \ldots + n \cdot a_n$.
(1) : $\sum_{k\geq 1} a_k$ being convergent, there exists for every $\varepsilon > 0$ some $N \in \mathbb{N}$ with $0 \leq \sum_{k=N}^n a_k < \frac{\varepsilon}{2}$ for all $n \geq N$. Therefore

$$\begin{aligned} 0 < \tfrac{A_n}{n} &= \tfrac{1}{n}\left[A_{N-1} + \textstyle\sum_{k=N}^n k a_k\right] \leq \\ &\leq \tfrac{1}{n}\left[N \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{N-1} a_k + n \sum_{k=N}^n a_k\right] \leq \\ &\leq \tfrac{N}{n} \cdot s + \tfrac{\varepsilon}{2} < \\ &< \varepsilon \text{ for all } n \geq N_*, \text{ where } N_* \geq \tfrac{2Ns}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

(2) : For all $n \geq 2$: $\frac{A_k}{k(k+1)} = \left(\frac{A_k}{k} - \frac{A_k}{k+1}\right) = \frac{A_{k-1}}{k} + a_k - \frac{A_k}{k+1}$. Therefore

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} = \frac{A_1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{A_k}{k(k+1)} = \frac{A_1}{2} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{A_{k-1}}{k} + a_k - \frac{A_k}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{A_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{k+1} + \sum_{k=2}^n a_k - \sum_{k=2}^n \frac{A_k}{k+1} = \frac{A_1}{2} + \sum_{k=2}^n a_k + \frac{A_1}{2} - \frac{A_n}{n+1} =$$

$$= A_1 + \sum_{k=2}^n a_k - \frac{A_n}{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k - \frac{A_n}{n+1}.$$

But using part (1) we see that $0 < \frac{A_n}{n+1} < \frac{A_n}{n} < \varepsilon$ for all $n \geq N_*$. Thus (2) is proved.

7.5.: Später.