Lösungen zum 8. Übungsblatt zur Analysis I

8.1:

Zu a): Für $b > 1$ ist $\sqrt[n]{n+1}b^n \geq b^n \nearrow \infty$, für $0 \leq b < 1$ ist $0 < \sqrt[n]{n+1}b^n \leq \sqrt[n]{2n}b^n \to 1 \cdot 0 = 0$, also ist $\{\sqrt[n]{n+1}b^n | n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt für $b > 1$, aber beschränkt für $0 \leq b < 1$. Daraus folgt $R_A = 1$.

Zu b): Nach Aufg. 6.1 ist

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n} b^n} = \frac{b}{e} \tag{1}$$

Folglich gibt es zu jedem b mit $0 \leq b < e$, also mit $\frac{b}{e} < 1$, ein Δ mit $\frac{b}{e} < \Delta < 1$, so dass

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{n} b^n} < \Delta \text{ für fast alle n}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{n} b^n < \Delta^n < 1 \text{ für fast alle } n$$

$$\Rightarrow \{\frac{n!}{n} b^n | n \in \mathbb{N}\} \text{ ist beschränkt für } b < e$$

Analog gibt es wegen (1) für $b > e$ ein Δ mit $1 < \Delta < \frac{b}{e}$ so dass

$$1 < \Delta < \sqrt[n]{\frac{n!}{n} b^n} \text{ für fast alle n}$$

$$\Rightarrow 1 < \Delta^n < \frac{n!}{n} b^n \text{ für fast alle n}$$

$$\Rightarrow \{\frac{n!}{n} b^n | n \in \mathbb{N}\} \text{ ist unbeschränkt für } b > e$$

Es folgt $R_A = e$.

Zu c): Für $b > 1$ ist $K := \{(\log n) b^n | n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt.
Für $0 \leq b < 1$ ist $0 \leq \sqrt[n]{(\log n) b^n} \leq \sqrt[n]{n} b \to b$. Für Δ mit $b < \Delta < 1$ gilt daher $0 \leq \sqrt[n]{(\log n) b^n} \leq \Delta$ für fast alle n. Daraus folgt $0 \leq (\log n) b^n \leq \Delta^n < 1$ für fast alle n. Die Menge K ist daher beschränkt für $0 \leq b \leq 1$. Es folgt $R_A = 1$.

Zu d): Sei $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\exp(n^2)}$. Die Reihe $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$. Beweis mit dem Quotientenkriterium oder Wurzelkriterium: Sei $0 < b$ beliebig.
Quotientenkriterium:

$$0 < \frac{a_{n+1} b^{n+1}}{a_n b^n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\exp(n^2)}{\exp((n+1)^2)} \cdot b = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \exp(-(2n+1)) \cdot b < 2 \left(\frac{1}{e}\right)^n \cdot b \to 0 \cdot b = 0$$

Für jedes $0 < \Delta < 1$ folgt hieraus $\left|\frac{a_{n+1}b^{n+1}}{a_n b^n}\right| < \Delta$ für fast alle n.
Wurzelkriterium:

$$0 < \sqrt[n]{a_n b^n} < \frac{\sqrt[n]{n}}{e^n} \cdot b \to 0 \cdot b = 0$$

Für jedes $0 < \Delta < 1$ folgt hieraus $0 < \sqrt[n]{a_n b^n} < \Delta$ für fast alle n.

8.2:
Zu a) Sei $f(x) := \exp(-1/x^2)$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$.
Sei $\bar{x} \neq 0$. Aus $x_n \to \bar{x}$ folgt mit STAB $-1/x_n^2 \to -1/\bar{x}^2$, und, da exp stetig ist, $\exp\left(-1/x_n^2\right) \to \exp\left(-1/\bar{x}^2\right)$, also ist f stetig in allen $\bar{x} \neq 0$.
Sei $\bar{x} = 0$. Aus $x_n \to 0$, $x_n^2 \neq 0$, folgt mit STAB $x_n^2 \to \bar{x}^2 = 0$, $x_n^2 > 0$, also $\left(1/x_n^2\right)$ divergiert gegen $+\infty$. Wegen $\exp\left(1/x_n^2\right) \geq 1 + 1/x_n^2$ folgt: $\exp\left(1/x_n^2\right)$ divergiert ebenfalls gegen $+\infty$.
$\Longrightarrow \exp\left(-1/x_n^2\right) = \left(\exp\left(1/x_n^2\right)\right)^{-1}$ konvergiert gegen $0 = f(0)$. Damit ist f auch in $\bar{x} = 0$ stetig, insgesamt also stetig in $\mathbb{R}$.

Zu b) Sei $f : x \longmapsto x^x = \exp(x \log x)$, $x > 0$. $id_{\mathbb{R}}, \log$ stetig auf $\mathbb{R}_+ \Longrightarrow g : x \longmapsto x \log x$ stetig auf $\mathbb{R}_+$. exp stetig $\Longrightarrow f = \exp \circ g$ stetig auf $\mathbb{R}_+$.

Zu c) Sei $f(x) := x$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) := 1 - x$ für $x \notin \mathbb{Q}$.
Sei $\bar{x} = \frac{1}{2} \Longrightarrow f(\bar{x}) = \frac{1}{2}$. Sei $x_n \to \frac{1}{2}$.
$\Longrightarrow$ Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also auch $|(1 - x_n) - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{2} - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Weil nun für alle n gilt $f(x_n) = x_n$ oder $f(x_n) = 1 - x_n$, folgt $|f(x_n) - f\left(\frac{1}{2}\right)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also $f(x_n) \to f\left(\frac{1}{2}\right)$, d.h. f ist stetig in $\bar{x} = \frac{1}{2}$.
Sei $\bar{x} \neq \frac{1}{2} \Longrightarrow \bar{x} \neq 1 - \bar{x}$.
1. Fall: $\bar{x} \in \mathbb{Q}$. $\Longrightarrow f(\bar{x}) = \bar{x}$.
Wähle $x_n := \bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{n}$. $\Longrightarrow x_n \notin \mathbb{Q}$ und $x_n \to \bar{x} \Longrightarrow f(x_n) = 1 - x_n \to 1 - \bar{x} \neq f(\bar{x})$, d.h f ist unstetig in $\bar{x}$.
2. Fall: $\bar{x} \notin \mathbb{Q}$. $\Longrightarrow f(\bar{x}) = 1 - \bar{x}$.
Nach Vorl. existiert $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $\bar{x} < x_n < \bar{x} + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\Longrightarrow x_n \to \bar{x}$ und $f(x_n) = x_n \to \bar{x} \neq f(\bar{x})$, d.h f ist unstetig in $\bar{x}$. Insgesamt ist f unstetig in allen $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

Zu d) Nützlich ist folgender
HILFSSATZ (Variante des Folgenkriteriums der Stetigkeit): $f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig in $\bar{x} \in I$, wenn gilt:

$$f(x_n) \to f(\bar{x}) \text{ für alle Folgen } x_n \to \bar{x} \text{ mit } x_n > \bar{x} \text{ und für alle Folgen } x_n \to \bar{x} \text{ mit } x_n < \bar{x}. \tag{2}$$

Beweis des Hilfssatzes: Gelte (2). Sei (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \to \bar{x}$, $x_n \neq \bar{x}$. Zu zeigen: $f(x_n) \to f(\bar{x})$.
1. Fall: $x_n > \bar{x}$ für fast alle n, etwa für alle $n \geq N$. Dann ist $(x_n)_{n \geq N}$ eine gegen $\bar{x}$ konvergente Teilfolge mit $x_n > \bar{x}$ für alle Indexwerte. Mit (2) folgt: $(f(x_n)_{n \geq N}$ konvergiert gegen $f(\bar{x})$, also auch $(f(x_n)_{n \geq 0} \to f(\bar{x})$.
2. Fall: $x_n < \bar{x}$ für fast alle n. Analog zum 1. Fall folgt $(f(x_n)_{n \geq 0} \to f(\bar{x})$.

Wenn weder der 1. noch der 2. Fall vorliegt, so sind die Indexmengen $I := \{n \in \mathbb{N} | x_n > \bar{x}\}$ und $J := \{n \in \mathbb{N} | x_n < \bar{x}\}$ beide unendlich und $(x_n)_{n\in I}$ sowie $(x_n)_{n\in J}$ zwei Teilfolgen, die gegen $\bar{x}$ konvergieren und zum 1. bzw. 2. Fall gehören. Daher gilt $(f(x_n)_{n\in I} \to f(\bar{x})$ und $(f(x_n)_{n\in J} \to f(\bar{x})$.
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_n) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ für alle $n \in I$ mit $n \geq N_1$ und es existiert ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_n) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ für alle $n \in J$ mit $n \geq N_2$. Setze $N := \max\{N_1, N_2\}$. Wegen $I \cup J = \mathbb{N}$ gilt dann $|f(x_n) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$, folglich konvergiert $(f(x_n))_{n\geq 0}$ gegen $f(\bar{x})$. Damit ist der Hilfssatz nach dem Folgenkriterium bewiesen.

Anwendung: Sei $f(x) := [x] + \sqrt{x - [x]}$, $x \in \mathbb{R}$. Beh.: f ist stetig in $\mathbb{R}$. Bew.:
1. Fall: $\bar{x} \in \mathbb{Z}$, also $[\bar{x}] = \bar{x} = f(\bar{x})$. Sei $x_n \to \bar{x}, x_n > \bar{x}$, Œ $|x_n - \bar{x}| < 1$.
$\Longrightarrow [x_n] = \bar{x}$ für alle n und damit $f(x_n) = \bar{x} + \sqrt{x_n - \bar{x}} \to \bar{x} + \sqrt{0} = f(\bar{x})$, da die Wurzelfunktion stetig ist (als Umkehrfunktion von $x \longmapsto x^2$). Sei $x_n \to \bar{x}, x_n < \bar{x}$, Œ $|x_n - \bar{x}| < 1$.
$\Longrightarrow [x_n] = \bar{x} - 1$ für alle n und damit $f(x_n) = \bar{x} - 1 + \sqrt{x_n - (\bar{x} - 1)} \to \bar{x} - 1 + \sqrt{1} = \bar{x} = f(\bar{x})$, wieder wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion. Mit dem Hilfssatz folgt, dass f stetig ist in allen $\bar{x} \in \mathbb{Z}$.
2. Fall: $\bar{x} \notin \mathbb{Z}$. $\Longrightarrow \varepsilon := \min\{x - [x], [x] + 1 - x\} > 0$, und für alle x mit $|x - \bar{x}| < \varepsilon$ gilt $[x] = [\bar{x}]$. Sei $x_n \to \bar{x}$, Œ $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ für alle n. Mit der Stetigkeit der Wurzelfunktion folgt $f(x_n) = [\bar{x}] + \sqrt{x_n - [\bar{x}]} \to [\bar{x}] + \sqrt{\bar{x} - [\bar{x}]} = f(\bar{x})$, d.h. f ist stetig in allen $\bar{x} \notin \mathbb{Z}$.

8.3:
Sei $f(t) := \frac{t}{1-t}$ für alle $t \in (0,1)$.
Da der Nenner von f auf $(0,1)$ nicht Null wird, ist f auf $(0,1)$ wohldefiniert und als Quotient zweier stetiger Funktionen stetig.
Injektivität: Sei $f(t_1) = f(t_2)$
$\Longrightarrow \frac{t_1}{1-t_1} = \frac{t_2}{1-t_2}$
$\Longrightarrow t_1(1 - t_2) = (1 - t_1)t_2$
$\Longrightarrow t_1 - t_1t_2 = t_2 - t_1t_2$
$\Longrightarrow t_1 = t_2$.
bild $f = \mathbb{R}_+$: Weil t und $1 - t$ beide positiv sind für $t \in (0,1)$, gilt trivialerweise bild $f \subset \mathbb{R}_+$. Bleibt zu zeigen: $R_+ \subset$bild f. Sei dazu $x \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Dann ist $t := \frac{x}{1+x} \in (0,1)$ und es folgt:
$t(1 + x) = x$
$t + tx = x$
$t = x - tx$
$\frac{t}{1-t} = x$, d.h. $f(t) = x$. Wegen der Injektivität von f ist $t := \frac{x}{1+x}$ das einzige Urbild von $x \in \mathbb{R}_+$, also $g : \mathbb{R}_+ \to (0,1)$, $x \longmapsto \frac{x}{1+x}$ die Umkehrabbildung von $f : (0,1) \to \mathbb{R}_+$, $t \longmapsto \frac{t}{1-t}$. Als Quotient der stetigen, nicht Null werdenden Funktionen id_{R_+} und $1 + id_{R_+}$ ist g stetig.
Sei I ein beliebiges nichtausgeartetes Intervall, d.h. I enthalte mindestens zwei verschiedene Punkte a, b, Œ $a < b$. Dann enthält I das nichtleere offene Intervall (a,b) und $\varphi(s) := \frac{s-a}{b-a}$ ist eine Bijektion von (a,b) auf $(0,1)$, also $f \circ \varphi$ eine Bijektion von (a,b) auf $\mathbb{R}_+$. Wäre I höchstens abzählbar, so gäbe es eine Surjektion von $\mathbb{N}$ auf I, also erst recht eine Surjektion π von $\mathbb{N}$ auf (a,b). Dann wäre aber $f \circ \varphi \circ \pi$ eine Surjektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}_+$, und $-f \circ \varphi \circ \pi$ wäre eine Surjektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}_-$. Damit wäre $\mathbb{R}$ als Vereinigung von drei höchstens abzählbaren Mengen $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\{0\}$ selbst abzählbar, ein Widerspruch. Folglich ist I überabzählbar.
Annahme: Es gibt eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Dann enthält bild f mindestens zwei verschiedene Punkte $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{Q}$. Da f stetig ist, enthält bild f nach dem Zwischenwertsatz das nichtleere offene Intervall zwischen a und b, d.h. bild f ist überabzählbar nach Obigem.
Andererseits ist bild $f = f(\mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset f(\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ nach Voraussetzung. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist,

gibt es eine Surjektion $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Dann ist aber $f \circ \psi$ eine Surjektion von $\mathbb{N}$ auf $f(\mathbb{Q})$, also ist $f(\mathbb{Q})$ höchstens abzählbar und bild f als Vereinigung zweier höchstens abzählbarer Mengen ebenfalls höchstens abzählbar, ein Widerspruch. Die Annahme ist also falsch.

8.4: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous and $\check{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ be defined by $\check{f}(x) := \sup\{f(t)|t \in [a, x]\}$. Show that $\check{f}$ is continuous, too.
Proof: f continuous $\Longrightarrow$ f takes its maximum in $[a, x]$ $\Longrightarrow$ $\check{f}(x) = f(t')$ for some $t' \in [a, x]$. Therefore $\check{f}$ is a well-defined function with

$$\check{f}(x) \geq f(x) \qquad \text{for all } x \in [a, b] \tag{3}$$

$$\check{f} \nearrow \tag{4}$$

Take $\bar{x} \in [a, b]$.
1^{st} case: $\check{f}(\bar{x}) \neq f(\bar{x})$
$\Longrightarrow \exists t' \in [a, x) \;\; f(t') = \check{f}(\bar{x}) \underset{(3)}{>} f(\bar{x})$
f continuous $\Longrightarrow$ f locally bounded
$\Longrightarrow \exists\, \delta > 0$ such that $t' < \bar{x} - \delta$ and $f(t') > f(x)$ for all $\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta$.
By definition of $\check{f}$ it follows that $\check{f}(x) = f(t')$ for all $\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta$, i.e. $\check{f}$ is constant in $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ and therefore continuous in $\bar{x}$.
2^{nd} case: $\check{f}(\bar{x}) = f(\bar{x})$
f continuous $\Longrightarrow$ for every $\varepsilon > 0$ there exists some $\delta > 0$ with

$$f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon \qquad \text{for all } \bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta \tag{5}$$

For $\bar{x} - \delta < x \leq \bar{x}$ it follows that $\check{f}(\bar{x}) - \varepsilon = f(\bar{x}) - \varepsilon \underset{(5)}{<} f(x) \underset{(3)}{\leq} \check{f}(x) \underset{(4)}{\leq} \check{f}(\bar{x})$ hence

$$|\check{f}(x) - \check{f}(\bar{x})| < \varepsilon \tag{6}$$

On the other hand for $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$ we have
$\check{f}(\bar{x}) \underset{(4)}{\leq} \check{f}(x) = \sup\{f(t)|t \in [a, \bar{x}] \cup (\bar{x}, x]\} \leq \sup\{f(t)|t \in [a, \bar{x}] \cup (\bar{x}, \bar{x} + \delta)\} =$
$= \max\{\sup\{f(t)|t \in [a, \bar{x}]\}, \sup\{f(t)|t \in (\bar{x}, \bar{x} + \delta)\}\} \underset{(5)}{\leq} \max\{\check{f}(\bar{x}), f(\bar{x}) + \varepsilon\} =$
$= \max\{\check{f}(\bar{x}), \check{f}(\bar{x}) + \varepsilon\} = \check{f}(\bar{x}) + \varepsilon$ and therefore (6) holds again.
It follows that $|\check{f}(x) - \check{f}(\bar{x})| < \varepsilon$ for all $\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta$, i.e. $\check{f}$ is continuous in $\bar{x}$.

8.5: Später.