Lösungen zum 9. Übungsblatt zur Analysis I

9.1:
Zu a)

$$\lim f_n(x) = \lim \sqrt[n]{x} = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert in $[0,1]$ also punktweise gegen die Grenzfunktion f mit $f(0) := 0$ und $f(x) := 1$ für $x \in (0,1]$.
Da alle f_n stetig sind in $[0,1]$, die Grenzfunktion aber nicht, ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

Zu b) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x_n := \frac{x}{n+1}$. Dann folgt $\lim x_n = 0$, und, da sin stetig ist, auch $\lim \sin(x_n) = \sin(0) = 0$, d.h. $\lim g_n(x) = \lim \sin(\frac{x}{n+1}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
Die Funktionenfolge g_n konvergiert in $\mathbb{R}$ also punktweise gegen die konstante Funktion $g := 0$.
Wäre diese Konvergenz gleichmäßig, so müsste gelten $\lim \|g_n - g\| = 0$.
Nun ist $\|g_n - g\| = \|g_n\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| \leq 1$, weil $|\sin(x)| \leq 1$ ist. Aber aus $g_n\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ folgt $\|g_n\| = 1$ für alle n, also $\lim \|g_n - g\| = 1$. Damit ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

Zu c) Nach STAB gilt $\lim h_n(x) = \lim \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2$ für alle $x \in [-1,1]$. Die Funktionenfolge (h_n) konvergiert also in $[-1,1]$ punktweise gegen die Grenzfunktion h mit $h(x) := x^2$ für alle x.
Die Konvergenz ist gleichmäßig nach Dini, da $h_n \searrow h$, oder auch, weil man sieht, dass

$$\|h_n - h\| = \sup_{x\in[-1,1]} \{|h_n(x) - h(x)|\} = \sup_{x\in[-1,1]} \left\{ \left| \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2 \right| \right\} = \sup_{x\in[-1,1]} \left\{ \left| \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right| \right\}$$

$$\text{also } \|h_n - h\| = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0$$

Zu d)

$$\|e_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{exp(n(x^2+1))} \right\} = \frac{1}{e^n} \to 0$$

Die Funktionenfolge (e_n) konvergiert daher gleichmäßig gegen die konstante Funktion $e := 0$.

Zu e)

$$\sum_{k\geq 1} \left| \frac{sin(kx)}{k^\alpha} \right| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha} = \zeta(\alpha)$$

Die Reihe ist wegen $\alpha > 1$ gleichmäßig konvergent nach dem Majorantenkriterium.

9.2: Wegen

$$x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow \log x \text{ definiert,}$$

ist die Fragestellung äquivalent zur Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung

$$\log x + \exp x = y$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Da log und exp streng monoton wachsend und stetig sind, ist auch $f := \log + \exp$ streng monoton wachsend und stetig. Wegen der strengen Monotonie von f gibt es zu jedem $y \in \mathbb{R}$ höchstens eine Lösung der Gleichung. Sei nun $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Es genügt zu zeigen:

$$\text{Es gibt } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x_1) < y < f(x_2), \tag{1}$$

denn wegen der Stetigkeit von f wird nach dem Zwischenwertsatz dann auch der Wert y von f mindestens einmal angenommen.
Beweis von (1): Wähle $x_2 \geq \max\{1, y\}$. Dann gilt $\log x_2 \geq \log 1 = 0$, also

$$f(x_2) = \log x_2 + \exp x_x \geq \exp x_2 \geq 1 + x_2 \geq 1 + y > y$$

Wegen bild $\log = \mathbb{R}$ gibt es ein $x_1 > 0$ mit $\log x_1 < -|y| - e < 0$. Daraus folgt $x_1 < \exp 0 = 1$ und $\exp x_1 < e$, also auch

$$f(x_1) = \log x_1 + \exp x_1 < (-|y| - e) + e = -|y| \leq y.$$

9.3.:
Wegen $f_n \in BX$ ist $\check{f}_n$ wohldefiniert (= existent). Aus $f_n \underset{\|\,\|}{\longrightarrow} f$, $f_n \in BX$ für alle $x \in X$, folgt $f \in BX$ und daraus wiederum, dass auch $\check{f}$ wohldefiniert ist.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in X \text{ und alle } n \geq N \tag{2}$$

Behauptung: $\|\check{f}_n - \check{f}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
Beweis hierfür: Zunächst folgt aus (2) dass

$$f(x) \leq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in X \text{ und alle } n \geq N \tag{3}$$

$$f_n(x) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in X \text{ und alle } n \geq N \tag{4}$$

Sei nun $\bar{x} \in X$ beliebig gegeben. Aus (3) folgt für alle $n \geq N$

$$\check{f}(\bar{x}) = \sup\{f(x) | x \leq \bar{x}\} \leq \sup\{f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2} | x \leq \bar{x}\} = \check{f}_n(\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{2},$$

also $\check{f}(\bar{x}) - \check{f}_n(\bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Aus (4) folgt analog für alle $n \geq N$

$$\check{f}_n(\bar{x}) = \sup\{f_n(x) | x \leq \bar{x}\} \leq \sup\{f(x) + \frac{\varepsilon}{2} | x \leq \bar{x}\} = \check{f}_n(\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{2},$$

also $\check{f}_n(\bar{x}) - \check{f}(\bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$ und damit insgesamt $|\check{f}_n(\bar{x}) - \check{f}[\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\bar{x} \in X$ und $n \geq N$, d.h.

$$\|\check{f}_n - \check{f}\| = \sup\{|\check{f}_n(\bar{x}) - \check{f}(\bar{x})| \bar{x} \in X\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

wie behauptet. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, konvergiert die Sunrise-Folge $(\check{f}_n)$ gleichmäßig gegen $\check{f}$, den Sunrise von f.

9.4:

Zu a) Wegen $[x+m+\frac{1}{2}] = m + [x+\frac{1}{2}]$, wenn $m \in \mathbb{Z}$, gilt

$$\varphi(x+m) = \varphi(x) \text{ für alle } m \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

und diese Periodizitätseigenschaft überträgt sich sofort auf alle

$$\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \frac{1}{4^n}\varphi(4^n x)$$

sowie auf $\Phi = \sum_{n\geq 0} \varphi_n$. Es genügt also, die φ_n auf $[0,1]$ zu betrachten.

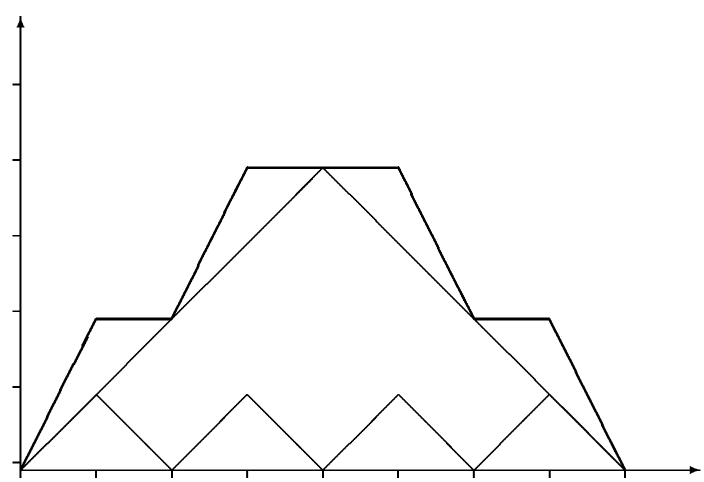
$$\left[x+\frac{1}{2}\right] = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,\frac{1}{2}) \\ 1 & \text{für } x \in [\frac{1}{2},1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \varphi_n(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0,\frac{1}{2}) \\ 1-x & \text{für } x \in [\frac{1}{2},1), \end{cases}$$

d.h. der Graph von $\varphi = \varphi_0$ besteht aus aneinandergereihten Zacken der Breite 1 und Höhe $\frac{1}{2}$, Maximum bei $x = \frac{1}{2}+k$, $k \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, Φ besitzt die gleichmäßige Majorante $\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n}$, konvergiert also gleichmäßig und ist daher stetig, da alle φ_n stetig sind.

Zu b) Entsprechend besteht der Graph von φ_n aus aneinandergereihten Zacken der Breite $\frac{1}{4^n}$ und Höhe $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^n}$, Maxima bei $x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^n} + \frac{k}{4^n}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Da die Summe von stückweise geradlinigen Funktionen wieder stückweise geradlinig ist, bestehen die Graphen von $\varphi_{2m}, \varphi_{2m+1}$ und von $\varphi_{2m}+\varphi_{2m+1}$ aus periodisch aneinandergereihten Streckenzügen wie folgt (Maßstab $1 : \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{2m+1}}$):



Graph von φ_{2m}, (= eine Zacke der Breite $\frac{1}{4^{2m}}$), von φ_{2m+1} (vier Zacken der Breite $\frac{1}{4^{2m+1}}$), und von $\varphi_{2m}+\varphi_{2m+1}$ (fettgedruckt)

$$\varphi_{2m}+\varphi_{2m+1} \text{ist maximal bei } x = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{2m}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{2m+1}}\right) + \lambda\frac{1}{4^{2m+1}} \text{ für alle } 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\text{mit Wert } \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{2m}} \text{ dort.}$$

Durch Aufsummieren folgt: $\Phi_{2n+1} = \sum_{m=0}^{n}(\varphi_{2m}+\varphi_{2m+1})$ ist maximal bei

$$x = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^{2m}} - \frac{1}{4^{2m+1}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}\left(\frac{-1}{4}\right)^{k}$$

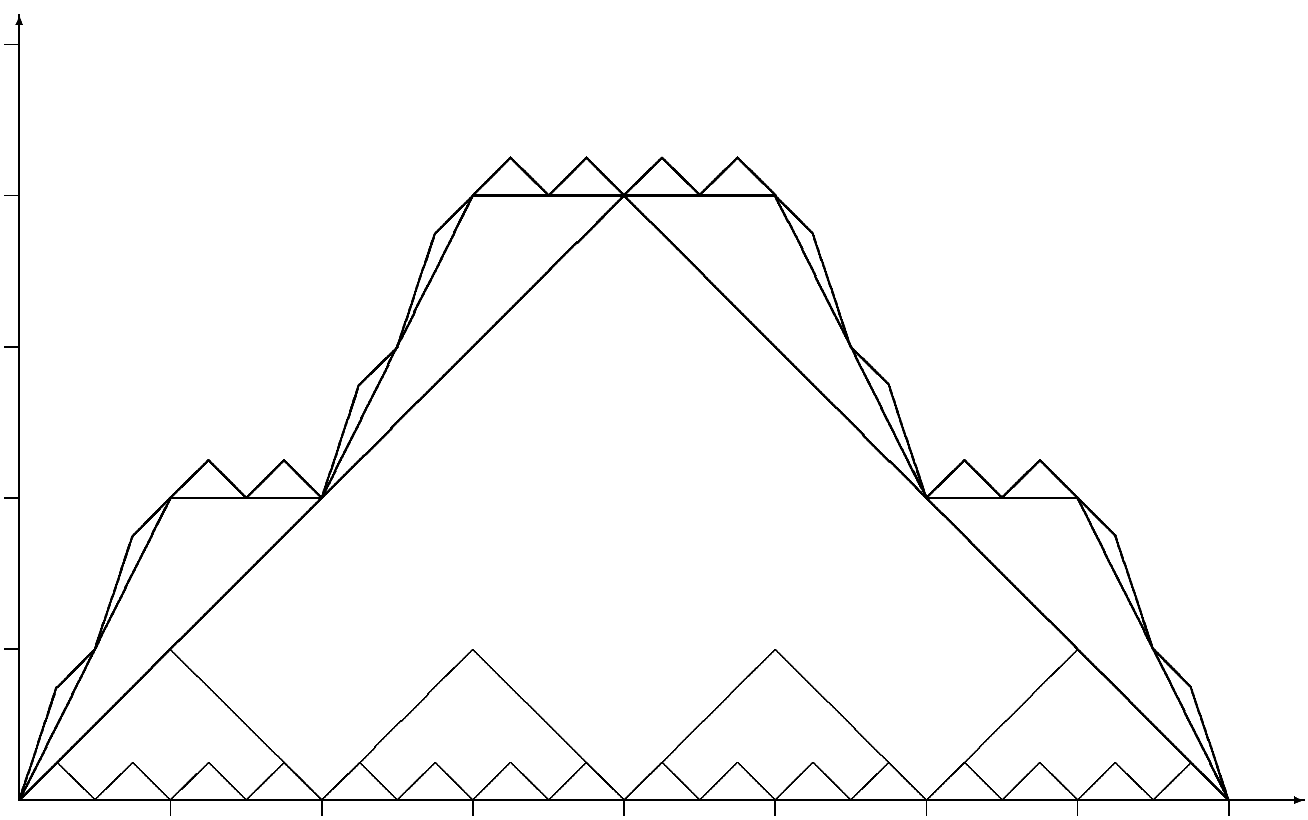
$$\text{mit Wert } \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{2m}} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{16}\right)^{m} \text{ dort.}$$

Durch Limesbildung folgt: $\Phi = \lim_{n\to\infty} \Phi_{2n+1}$ ist maximal bei

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{-1}{4}\right)^{m} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{-1}{4}} = \frac{2}{5}$$

$$\text{mit Wert } \frac{1}{2}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{1}{16}\right)^{m} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{8}{15} \text{ dort.}$$

Aus der Konstruktion von $\bar{x}$ ergibt sich, dass dies die kleinste Stelle ≥ 0 ist, wo Φ maximal wird. Der Graph von $\Phi_o = \varphi_0$ und $\Phi_1 = \varphi_0 + \varphi_1$ ergibt sich aus obiger Skizze, wenn man $n = 0$ (also den Maßstab $1 : \frac{1}{8}$) wählt. Die Graphen von Φ_3 und Φ_4 ergeben sich durch Iteration:



Skizze der Graphen φ_n und Φ_n (fettgedruckt) für $n = 0, 1, 2$.