0.2 Kombinatorik

Für eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ wird die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq N\}$ häufig einfach auch mit $\{0, 1, 2, \ldots N\}$ bezeichnet. 12/11/99

Lemma 0.2.0 (Aritmethische Summe) $\varphi : \{0, 1, \ldots N\} \to \mathbb{N}$ *injektiv. Dann existiert* $\max$ $(bild\varphi)$ *und es gilt*

(1) $\max\ (bild\varphi) \geq N$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{N} \varphi(k) \geq \frac{N(N+1)}{2}$

Zusatz:

äq

(i) $max(bild\ \varphi) = N$

(ii) $bild\ \varphi = \{0, 1, \ldots N\}$

(iii) $\sum\limits_{k=0}^{N} \varphi(k) = \frac{N(N+1)}{2}$

Insbesondere: $1 + 2 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$

Beweis: Induktion. Es gibt natürliche Zahlen

$$0 \leq n_0 < n_1 < \ldots < n_N$$

so dass $bild\ \ \varphi = \{n_0, n_1, \ldots, n_N\}$, also $max(bild\ \ \varphi) = n_N \geq N$ und

$$\sum_{k=0}^{N} \varphi(k) = \sum_{k=0}^{N} n_k \geq \sum_{k=0}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$$

□

Folgerung 0.2.1 $\varphi : \{0, 1, \ldots N\} \hookrightarrow \{0, 1, \ldots N'\}$ *injektiv. Dann ist* $N' \geq N$.

Definition 0.2.2 *Eine Menge* X *heißt endlich* $:\Leftrightarrow$ *Entweder ist* $X = \emptyset$ *oder aber es gibt eine Bijekion* $\{0, 1, \ldots N\} \to X$ *für ein geeignetes* N. *Eine nicht endliche Menge heißt unendlich.*

Sind $\varphi : \{0, 1, \ldots N\} \to X$ und $\psi : \{0, 1, \ldots N'\} \to X$ bijektiv so ist auch $\psi^{-1} \circ \varphi : \{0, 1, \ldots, N\} \to \{0, 1, \ldots N'\}$ bijektiv, insbesondere $N \leq N'$ und $N' \leq N$ d.h. $N = N'$. N ist also durch X 1-deutig bestimmt.

$$\#X := N + 1$$

heißt die Kardinalzahl von $X \neq \emptyset$. Ist $X = \emptyset$ so ist $\#X := 0$ per definitionem.

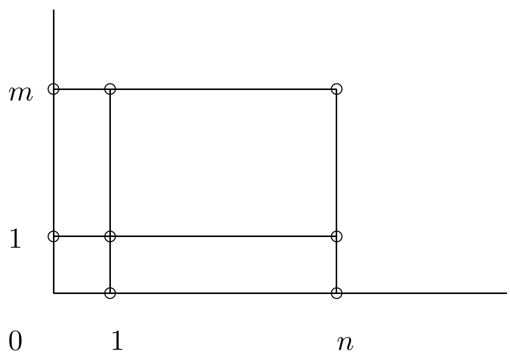
Satz 0.2.3 *X, Y endliche Mengen, $A \subset X$. Dann gilt*

(1) $\#A \leq \#X$

(2) $\#X \cup Y = \#X + \#Y - \#X \cap Y$

(3) $\#X \times Y = \#X \cdot \#Y$

(4) $\#Y^X = \#Y^{\#X}$



Beweis: (1) - (3): A 4.1
(4): Ist X oder Y leer, so ist ϕ die einzige Abbildung $X \to Y$, also $\#Y^X = \#Y^{\#X} = 1$. Ist $\#X = 1$ so entsprechen die Abbildungen $X \to Y$ den Punkten von Y also $\#Y^X = \#Y = \#Y^{\#X}$
Œ $\#X \geq 2, \quad Y = \{0, 1, \ldots N\}, \quad a \in X. \quad X' := X \setminus \{a\}$. Nach Induktion ist $\#Y^{X'} = \#Y^{\#X'}$. Definiere eine Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} \chi : Y^{X'} \times Y & \longrightarrow & Y^X \\ \Cup & & \Cup \\ (g, n) & \longmapsto & g_n \end{array}$$

durch

$$g_n(x) := \begin{cases} g(x) & x \in X' \\ n & x = a \end{cases}$$

χ hat die Umkehrabbildung $\varphi \to (\varphi|X', \varphi(a))$, d.h.

$$\#Y^X = \#(Y^{X'} \times Y) = \#Y^{\#X'} \cdot \#Y = \#Y^{\#X}$$

$\square$

Folgerung 0.2.4 *X endlich $\Rightarrow \#PX = 2^{\#X}$.*

Beweis: Ist $X = \emptyset$ so ist $PX = \{\emptyset\}$, also $\#PX = 1 = 2^0$. Sei $X \neq \emptyset$. Definiere Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \chi : PX & \longrightarrow & \{0,1\}^X \\ \Cup & & \Cup \\ U & \longmapsto & \chi_U \end{array}$$

durch

$$\chi_U : X \to \{0,1\}$$

$$\chi_U(x) := \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}.$$

χ_U bezeichnet man auch als die „charakteristische" Funktion von $U \subset X$. χ hat die Umkehrabbildung

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \{0,1\}^X & \longrightarrow & PX \\ \Cup & & \Cup \\ f & \longmapsto & f^{-1}(1) \end{array}$$

wobei f eine beliebige Abbildung $X \to \{0,1\}$ ist. Da somit χ eine Bijektion von PX auf $\{0,1\}^X$ ist, gilt

$$\#PX = \#\{0,1\}^X = 2^{\#X}.$$

$\square$

Folgerung 0.2.5 (Schubfachprinzip) *$\emptyset \neq X, Y$ endlich, $\varphi : X \to Y$ Dann gilt:*

(1) $\#X \leq \#Y$ falls φ injektiv

(2) $\#X \geq \#Y$ falls φ surjektiv.

Beweis: $\#X = \#\mathit{bild}\ \ \varphi \leq \#Y$ falls φ injektiv. Ist φ surjektiv, so sind sämtliche Fasern $\emptyset \neq \varphi^{-}(y), y \in Y$, nicht leer und paarweise disjunkt, also 16/11/99

$$\#X = \sum_{y \in Y} \#\varphi^{-}(y) \geq \#Y.$$

Ist $\varphi : X \to Y$ surjektiv und $y \mapsto \#\varphi^{-}(y)$ konstant, so ist

$$\#X = \#\varphi^{-}(y) \cdot \#Y$$

(SCHÄFERPRINZIP) $\square$

Folgerung 0.2.6 *$\emptyset \neq X$ endlich, $\varphi : X \to X$ Selbstabbildung*

äq

(i) φ injektiv

(ii) φ surjektiv

(iii) φ bijektiv.

Definition 0.2.7 *$k, n \in \mathbb{N}$*

(1) $n! := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)! & n > 0 \end{cases}$ *n-Fakultät*

(2) $\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & k \leq n \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$ *Binomialkoeffizient n über k.*

EX: $10! = 3.628.800$

Satz 0.2.8 *$\emptyset \neq X, Y$ endlich so dass $n := \#X \leq m := \#Y$. Dann gibt es genau*

$$\frac{m!}{(m-n)!}$$

injektive Abbildungen $X \hookrightarrow Y$.

Folgerung 0.2.9

(1) $\emptyset \neq X$ endlich, $n := \#X$. Dann ist $\#Aut(X) = n!$

(2) Eine n-elementige Menge hat genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen.

Beweis: Œ $X = \{0, \ldots, n-1\},\ Y = \{0, \ldots, m-1\}$,
$n \geq 2$ $X' := \{0, \ldots, n-2\} \neq \emptyset$. Nach Induktion gibt es genau $\frac{m!}{(m-(n-1))!}$ injektive Abbildungen $\varphi : X' \hookrightarrow Y$. $\#(Y \setminus bild\ \varphi) = m-(n-1) \geq 1$ Definiere für $y \in Y \setminus bild\varphi$

$$\varphi_y : X \to Y,\ \varphi_y(x) := \begin{cases} \varphi(x) & x \in X' \\ y & x = n-1 \end{cases}$$

Die Abbildung φ_y ist injektiv. Ist umgekehrt $\psi : X \to Y$ injektiv, so ist $\psi|X'$ ebenfalls injektiv und $\psi = (\psi|X')_{\psi(n-1)}$. Daher gibt es genau

$$\frac{m!}{(m-(n-1))!}(m-(n-1))! = \frac{m!}{(m-n)!}$$

injektive Abbildungen $X \hookrightarrow Y$. □

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen

$$X \twoheadrightarrow Y,\ n := \#X \geq m := \#Y$$

ist wesentlich schwieriger zu bestimmen. Tatsächlich ist ihre Anzahl gerade

$$m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - ... + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}.$$

Eigenschaften 0.2.10

(1) $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(3) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Die 2-te Eigenschaft entspricht der Achsen-Symmetrie des Pascal'schen[14] Dreiecks; die 3-te Eigenschaft der rekursiven Berechnung der Binomialkoeffizienten.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Satz 0.2.11 $\mathbb{F}$ *Körper,* $x, y \in \mathbb{F},\ n \in \mathbb{N}$. *Dann ist*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis: Induktion/Indexverschiebung.

Folgerung 0.2.12

(1) $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

[14] Blaise Pascal (1623-1662), franz. Mathematiker

(2) $0 = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Definition 0.2.13 *: X Menge* 17/11/99

(1) *X höchstens abzählbar* $:\Leftrightarrow$ *Entweder ist $X = \emptyset$ oder aber es gibt eine Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow X$.*

(2) *X überabzählbar* $:\Leftrightarrow$ *X ist nicht höchstens abzählbar.*

Satz 0.2.14 *Ist X eine endliche Menge, so ist X höchstens abzählbar.*

Beweis: Œ $X \neq \emptyset$, $\varphi : \{0, ..N\} \to X$ bijektiv. $\psi : \mathbb{N} \to \{0, ..N\}$,

$$\psi(n) := \begin{cases} n & n \leq N \\ N & n \geq N \end{cases}$$

ist surjektiv, also $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow X$. □

[HS] X, Y höchstens abzählbar, $A \subset X$.

Dann ist auch

(1) A höchstens abzählbar

(2) $X \cup Y$ höchstens abzählbar

(3) $X \times Y$ höchstens abzählbar.

WARNUNG: Y^X ist i.a. überabzählbar.

Ⓢ $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar.

Beweis: Angenommen,

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{N} & \twoheadrightarrow & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ \Cup & & \Cup \\ n & \mapsto & \varphi_n \end{array}$$

ist surjektiv, wobei φ_n eine Abbildung $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ ist. Definiere die „Diagonalfolge“ $\Delta : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ wie folgt:

$$\Delta(n) := \begin{cases} 1 & \varphi_n(n) = 0 \\ 0 & \varphi_n(n) = 1 \end{cases}$$

Dann ist $\Delta \neq \varphi_n$ für alle n, also $\Delta \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus bild\varphi$, ein Widerspruch zur Surjektivität von φ. □

Beweis des HS: Œ $X, Y, A \neq \emptyset$.
(1): $a \in A, \varphi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow X$ surjektiv. Definiere $\psi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ durch

$$\psi(x) := \begin{cases} \varphi(x) & x \in \varphi^{-}(A) \\ a & \mathit{sonst} \end{cases}$$

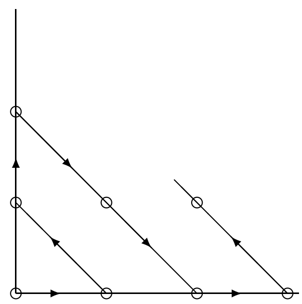
(2): $\iota : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (n,m) \mapsto \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)+m$, injektiv, also existiert eine Bijektion $\beta : \mathit{bild}\,\iota \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und eine Surjektion $\gamma : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathit{bild}\,\iota$ nach (1). Die Komposition $\beta \circ \gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist surjektiv, d.h. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist höchstens abzählbar.
$N_1 := \mathbb{N}_+ \times \{0\}$ und $N_2 := \{0\} \times \mathbb{N}_+$ sind disjunkte Teilmengen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, also ist $A := N_1 \cup N_2 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach Teil (1) höchstens abzählbar.
Konstruktion einer Bijektion

$$\chi : A \twoheadrightarrow X \cup Y :$$

Nach Voraussetzung existiert $\varphi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow X,\ \psi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y$. Setze
$\chi(n,0) := \varphi(n-1)$ für $(n,0) \in N_1$
$\chi(0,n) := \psi(n-1)$ für $(0,n) \in N_2$
Wegen $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ ist χ wohldefiniert und bijektive Abbildung von A auf $X \cup Y$. $\mathbb{N} \twoheadrightarrow A \xrightarrow{\chi} X \cup Y$.
(3):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \stackrel{\varphi \times \psi}{\longrightarrow} & X \times Y \\ \Cup & & \Cup \\ (n,m) & \longmapsto & (\varphi(n), \psi(m)) \end{array}$$

$\square$



Eine „Durchnumerierung“ von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Folgerung 0.2.15 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *höchstens abzählbar.*

Beweis: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{Z},\ (n,m) \mapsto n-m$. $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus 0) \twoheadrightarrow \mathbb{Q},\ (p,q) \mapsto p/q$. $\square$

Theorem 0.2.16 $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Folgerung 0.2.17 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *überabzählbar.*

Es gibt also „mehr" irrationale als rationale Zahlen - fast wie im richtigen Leben.

Beweis des Theorems: Angenommen $x : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{R}, n \mapsto x_n$, Surjektion, d.h. $\mathbb{R} = \{x_0, x_1, ...\}$ läßt sich „durchnumerieren". Dann gibt es eine „Folge" $I_n, n \in \mathbb{N}$, von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ so dass

(1) $I_{n+1} \subset I_n, n = 0, 1, 2, ..$

(2) $x_n \notin I_n$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es eine reelle Zahl

$$s \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{t \in \mathbb{R} \mid t \in I_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

Die so gefundene Zahl s kommt nicht unter den x_n vor, d.h. $s \neq x_n$ für alle n, da sonst

$$s = x_m \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset I_m$$

für ein $m \in \mathbb{N}$. Konstruktion der I_n:

(1) $a_0 := x_0 + 1 < b_0 := x_0 + 1, x_0 \notin I_0 := [a_0, b_0]$

(2) Zerlege $[a_0, b_0]$ in die drei Teilintervalle:

$$[a_0, a_0 + \frac{1}{3}(b_0 - a_0)]$$

$$[a_0 + \frac{1}{3}(b_0 - a_0), a_0 + \frac{2}{3}(b_0 - a_0)]$$

$$[a_0 + \frac{2}{3}(b_0 - a_0), b_0]$$

In wenigstens einem dieser Teilintervalle liegt <u>nicht</u> x_1. Sei $I_1 := [a_1, b_1]$ dasjenige Teilintervall mit kleinstem linken Randpunkt, in dem x_1 nicht liegt, also

$$x_1 \notin I_1 \subset I_0$$

(3) Konstruiere induktiv I_{n+1} aus I_n.

□

Ergänzung 0.2.18 *(nicht Teil der VL)*

Ⓢ $X \neq \emptyset$

äq

(i) X endlich

(ii) Es gibt eine Surjektion $\{0, \ldots, N\} \twoheadrightarrow X$ für ein gegeignetes $N \in \mathbb{N}$.

Zusatz:

(1) $\#X = min\{N \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt eine Surjektion } \{0, \ldots, N\} \twoheadrightarrow X\} + 1$

(2) Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Jede Bijektion $\{0, \ldots, N\} \to X$ ist automatisch surjektiv.
$(ii) \Rightarrow (i)$: N minimal, $\varphi : \{0, \ldots, N\} \twoheadrightarrow X$ surjektiv. Ist φ nicht injektiv, so gibt es $0 \leq n < m \leq N$ so dass $\varphi(n) = \varphi(m)$. Definiere
$\psi : \{0, \ldots, N-1\} \to X$ durch

$$\psi(k) := \begin{cases} \varphi(k) & k < m \\ \varphi(k+1) & m \geq k \geq N-1. \end{cases}$$

ψ ist surjektiv, Widerspruch. □

Zusatz: Ist $\emptyset \neq A \subset X$, wähle $a \in A$, definiere $\tilde{\varphi} : \{0,\ N\} \to A$ durch

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi(n) & n \in \varphi^{-}A \\ a & n \notin \varphi^{-}A. \end{cases}$$

Ⓢ äq

(i) X unendliche Menge

(ii) Es gibt eine Injektion $\mathbb{N} \hookrightarrow X$.

Beweis: $(ii) \Rightarrow (i)$: $X \neq \emptyset$. Wäre X endlich, so existierte eine Bijektion $X \to \{0, .., N\}$ für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$. Die Komposition
$\varphi : \{0, .., N+1\} \hookrightarrow X \to \{0, .., N\}$ ist dann injektiv, also
$N \geq max(bild(\varphi) \geq N+1$.
$(i) \Rightarrow (ii)$: $X \neq \emptyset$. Wähle $x_0 \in X$. Da X nicht endlich, gibt es ein $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$, also nach Induktion $x_k \in X, k \in \mathbb{N}$, paarweise verschieden, d.h. $k \mapsto x_k$ ist eine Injektion $\mathbb{N} \hookrightarrow X$. □

Ⓢ X höchstens abzählbar

äq

(i) X nicht endlich

(ii) Es gibt eine Bijektion $\mathbb{N} \to X$.

Beweis: $(ii) \Rightarrow (i)$: s.o.
$(i) \Rightarrow (ii)$: $X \neq \emptyset, \psi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow X$, insbesondere sind die Fasern
$\mathbb{N}_x := \psi^-(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$ und $min\ \mathbb{N}_x$ existiert. Außerdem gilt:

(1) $min\ \mathbb{N}_x = min\ \mathbb{N}_{x'} \Leftrightarrow x = x'$

(2) $\psi(min\ \mathbb{N}_x) = x$.

Definiere
$\pi(0) := min\{min\ \mathbb{N}_x \mid x \in X\}$,
$\pi(1) := min\{min\ \mathbb{N}_x \mid \pi(0) < min\ \mathbb{N}_x, x \in X\}$,
induktiv
$\pi(k) := min\{min\ \mathbb{N}_x \mid \pi(0) < \pi(1) < \ldots < \pi(k-1) < min\ \mathbb{N}_x,\ x \in X\}$.
Da X nicht endlich, ist π für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert; die Komposition
$\mathbb{N} \xrightarrow{\pi} \mathbb{N} \xrightarrow{\psi} X$ ist bijektiv. $\square$