Skript zur Vorlesung

Analysis I

Marburg, Wintersemester 1999/2000

Friedrich W. Knöller

Literaturverzeichnis

[1] Barner, Martin und Flohr, Friedrich: Analysis I. de Gruyter. 19XX

[2] Forster, Otto: Analysis 1. Vieweg. 1999

[3] Lang, Serge: Analysis I. Addison-Wesley. 1968
ergänzend

[4] Dieudonné, Jean: Foundations of Modern Analysis. Academic Press. 1960

[5] Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis Teil 1. Teubner. 19XX

[6] Spivak, Michael: Calculus. Benjamin. 19XX

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Grundlagen

0.0 Mengen und Abbildungen

Weite Teile der Mathematik basieren auf dem Begriff der **Menge**, so auch die Analysis. Allerdings ist es ausgesprochen schwierig, genau zu sagen, was eine Menge im streng–mathematischen Sinne ist. Hilfreich ist die naive Vorstellung davon, was eine Menge ist, etwa im Sinne **Georg Cantors** (1845-1918) – des Schöpfers der Mengenlehre –, für den eine Menge eine „Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte des Denkens – den sogenannten Elementen der Menge – zu einem Ganzen“ ist. Fasst man beispielsweise[1] die Zahlen 25/10/99

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

zusammen, so erhält man die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Präziser ist der semi-axiomatische Zugang, bei dem die Begriffe „Menge“ und „Element von“ undefiniert bleiben – ähnlich wie „Punkt“ und „Gerade“ in der Geometrie – und bei dem durch gewisse Prinzipien – Spielregeln gewissermaßen – festgelegt wird, wie mit den Begriffen „Menge“ und „Element von “ zu verfahren ist. Dabei sind die als Elemente einer Menge auftretenden Objekte selbst als Mengen (im mathematischen Sinne) anzusehen.

Ist die Menge a Element der Menge X, so schreibt man dafür $a \in X$ und sagt auch, dass a in X liegt oder dass a zu X gehört. Gehört a nicht zu X, so schreibt man $a \notin X$, etwa $-1 \notin \mathbb{N}$.

(EXTENSIONSPRINZIP)

Die Mengen X und Y sind gleich genau dann, wenn sie die selben Elemente haben.

Man kennt also eine Menge, wenn man deren Elemente kennt.

EX(ample):

$$\{1, 5, 8\} = \{1, 8, 5\} = \{1, 1, 5, 8\} \text{ aber } \{1, 2, 3\} \neq \{3, 2, 1, 4\}$$

[1] lediglich in den Beispielen der Abschnitte 0.0 und teilweise 0.1 wird auf Schulwissen zurückgegriffen.

Definition 0.0.0 (Teilmenge). *Seien X, Y Mengen. X ist eine Teilmenge von Y $:\Leftrightarrow$ Jedes Element von X liegt auch in Y.*

Ist X Teilmenge von Y, so schreibt man dafür $X \subset Y$. Beispielsweise ist

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

wobei $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen ist.

Rechenregeln

(1) $X \subset X$ (Reflexivität)

(2) $X \subset Y, Y \subset X \Rightarrow X = Y$ (Antisymmetrie)

(3) $X \subset Y, Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z$ (Transitivität)

Durch Spezifizieren oder Ausssondern kann man aus einer Menge X neue Mengen gewinnen. Dazu sei E eine Eigenschaft, die die Elemente von X haben können (oder auch nicht) und die mit Hilfe von

$$=,\ \in,\ \text{nicht, oder, und,}\ \Rightarrow, \Leftrightarrow,\ \text{für alle}\dots\ \text{gilt, es gibt}\dots\ \text{mit}$$

formulierbar ist.

Beispielsweise ist die Eigenschaft, dass 2 die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ teilt, gleichbedeutend damit, dass es ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2 \cdot m$.

(SPEZIFIKATIONSPRINZIP)

Zu einer Menge X und einer Eigenschaft E gibt es eine Menge X_E so dass $x \in X_E \Leftrightarrow x \in X$ und x hat die Eigenschaft E.

Bemerkung 0.0.1. *Nach dem Extensionsprinzip ist diese Menge X_E durch X und E 1-deutig bestimmt, sie wird mit*

$$\{x \in X \mid x \textit{ hat die Eigenschaft } E\}$$

bezeichnet. Sie ist eine Teilmenge von X.

Beispielsweise ist

$$2 \cdot \mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} \mid 2 \text{ teilt } n\} \subset \mathbb{Z}$$

die Menge der geraden Zahlen.

Satz 0.0.2 (leere Menge). *Es gibt genau eine Menge $\emptyset$ - die sogenannte leere Menge - so dass $\emptyset \subset X$ für jede Menge X.*

Beweis : Eindeutigkeit: Sind ϕ, ϕ' zwei derartige Mengen, so ist $\phi \subset \phi'$ und $\phi' \subset \phi$, also $\phi = \phi'$
Existenz[2]: Sei M irgendeine Menge. Dann ist $\phi_M := \{x \in M \mid x \neq x\}$ eine Menge nach **(SPEZ)**. Diese Menge ist Teilmenge jeder anderen Menge X. Wäre nämlich $\phi_M \not\subset Y$ für eine Menge Y, so existierte ein $x \in \phi_M$, so dass $x \notin Y$. Da $x \in \phi_M$, ist $x \neq x$, ein Widerspruch. □

[2]Es wird stillschweigend vorausgesetzt, dass es überhaupt Mengen (im mathematischen Sinne) gibt.

Auf ähnliche Weise sieht man, dass es nicht die

„Menge aller Mengen“

geben kann:

Satz 0.0.3. *Zu jeder Menge X gibt es eine Menge Y, so dass $Y \notin X$.*

Beweis : Nach **(SPEZ)** ist $Y := \{a \in X \mid a \notin a\}$ eine Menge. Angenommen $Y \in X$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: $Y \in Y$ oder $Y \notin Y$. Ist $Y \in Y$ so ist, da $Y \in X$, $Y \notin Y$, Ist $Y \notin Y$ so ist, da $Y \in X$, $Y \in Y$, in beiden Fällen ein Widerspruch. Deshalb ist $Y \notin X$. □

Der Beweis ist die mathematische Form der Russel'schen Antinomie[3]:

> „DER DORFBARBIER RASIERT ALLE MÄNNER DES DORFES, DIE SICH NICHT SELBST RASIEREN. WER RASIERT DEN DORFBARBIER?“

Weniger verblüffend sind die folgenden Bildungen:

Definition 0.0.4. *Seien $A, B \subset X$*

(1) $A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

(2) $A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

(3) $\complement_X A := \{x \in X \mid x \notin A\}$.

$A \cap B$ ist der Durchschnitt, $A \cup B$ die Vereinigung der Mengen A, B; $\complement_X A$ ist das Komplement von A in X, das manchmal auch mit $X \setminus A$ bezeichnet wird.

EX: $2 \cdot \mathbb{Z} \cap 3 \cdot \mathbb{Z} = 6 \cdot \mathbb{Z}$.

Rechenregeln

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(3) $\complement_X(\complement_X A) = A)$

(4) $\complement_X(A \cap B) = \complement_X A \ \cup \ \complement_X B$

(5) $\complement_X(A \cup B) = \complement_X A \ \cap \ \complement_X B$

Beweis: Vorlesung Lineare Algebra bzw. Übungen.

(4) und (5) sind die sogenannten de Morganschen[4] Regeln.

Unser nächstes Ziel ist, genau zu sagen, was wir unter einer Abbildung oder Funktion verste- 27/10/99

[3]Bertrand Russel (1872-1970), engl. Mathematiker

[4]Augustus de Morgan (1806-1871), engl. Mathematiker

hen wollen. Der Weg dahin ist allerdings noch weit.

(PAARUNGSPRINZIP)

Zu Mengen A, B gibt es eine Menge $M_{A,B}$, so dass $x \in M_{A,B} \Leftrightarrow x = A$ oder $x = B$.

Zwei Mengen A, B kann man also zu einer neuen Menge, deren Elemente gerade A und B sind, zusammenfassen. Nach **(EXT)** ist $M_{A,B}$ durch A, B 1-deutig bestimmt; man schreibt dafür

$$\{A, B\}.$$

Ist $A = B$, so schreibt man einfach

$$\{A\}.$$

(VEREINIGUNGSPRINZIP)

Zu jeder Menge $\mathcal{F}$ von Mengen (=Familie von Mengen) gibt es eine Menge $V_{\mathcal{F}}$, sodass $x \in V_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow$ Es existiert ein $X \in \mathcal{F}$ sodass $x \in X$.

Nach **(EXT)** ist $V_{\mathcal{F}}$ wieder durch $\mathcal{F}$ 1-deutig bestimmt; man schreibt dafür auch

$$\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X.$$

Diese Menge ist die Vereinigung aller Mengen $X \in \mathcal{F}$.

EX:

A, B Mengen, $\mathcal{F} := \{A, B\}$ nach **(PAAR)**. Es ist

$$\bigcup_{x \in \mathcal{F}} X = A \cup B.$$

Beweis: (Üb) (Beachte die unterschiedlichen Definitionen von $\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$ bzw. $A \cup B$).

Definition 0.0.5 (Tupel). *Sei $a \in A$ und $b \in B$. Dann heißt*

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

das Tupel mit der ersten Koordinate a und der zweiten Koordinate b.

Satz 0.0.6. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $(a, b) = (a', b')$

(ii) $a = a', \ b = b'$

Beweis: Übungsaufgabe 1.2

WARNUNG:

$(a, b) \neq \{a, b\}$. Ist z.B. $a \neq b$ so ist $(a, b) \neq (b, a)$ aber $\{a, b\} = \{b, a\}$.

(POTENZPRINZIP)

Zu jeder Menge X gibt es eine Menge PX, so dass $U \in PX \Leftrightarrow U \subset X$.

Die Potenzmenge PX besteht also aus allen Teilmengen von X; nach **(EXT)** ist sie durch X 1-deutig bestimmt.

EX:

[1] $P\,\emptyset = \{\emptyset\}$
[2] $(a,b) \in P(P(A \cup B))$

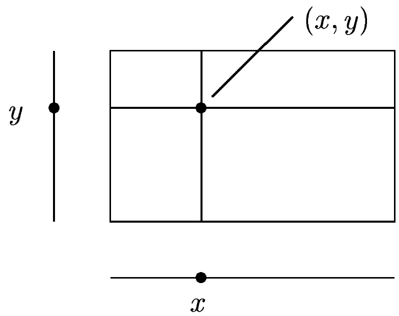
Wir können jetzt zunächst sagen, was das Produkt zweier Mengen ist. 29/10/99

Definition 0.0.7 (Produkt). *Seien X, Y Mengen. Dann heißt*

$$X \times Y := \left\{ z \in P(P(X \cup Y)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \textit{Es gibt ein } x \in X \textit{ und ein} \\ y \in Y \textit{so dass } z = (x,y) \end{array} \right\}$$

das (cartesische[5]) Produkt der Menge X mit Y.

Nach**(SPEZ)** ist $X \times Y$ eine Menge, sie besteht aus allen Tupeln (x,y) mit $x \in X$ und $y \in Y$

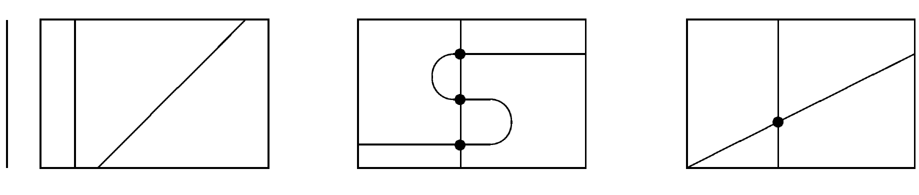


EX: $\emptyset \times X = \emptyset$

Definition 0.0.8. *Sei $f \subset X \times Y$. Dann heißt f Abbildung von X nach Y :$\Leftrightarrow$*

F1: Zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ so dass $(x,y) \in f$.

F2: Ist $(x,y) \in f$ und $(x,y') \in f$ so ist $y = y'$.



x (keine Abb.) x (keine Abb.) x (Abb.)

[5]René Descartes (1596-1650), franz. Mathematiker

Ist $f \subset X \times Y$ eine Abbildung und $(x, y) \in f$, so ist y durch x 1-deutig bestimmt; man schreibt deshalb auch $y = f(x)$. Dem Element $x \in X$ wird also durch f 1-deutig das Element $y = f(x)$ „zugeordnet". Deshalb benutzt man für Abbildungen auch die suggestive Schreibweise:

$$f : X \to Y, x \mapsto f(x) \text{ oder } \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Cup & & \Cup \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

F1 besagt, dass f für jedes $x \in X$ „definiert" ist

F2 besagt, dass f „wohldefiniert" ist.

EX:

[1] H = Menge der Hörer der Vorlesung „Analysis I" im WS 99/00.
$\mu : H \to \mathbb{N}, s \mapsto \mu(s)$ = Matrikelnummer von s.
μ ist eine Abbildung, falls es keine „Schwarzhörer" gibt und falls die Verwaltung nicht (aus Versehen) an einen Studenten zwei Matrikelnummern vergeben hat.
[2] $f : X \to Y, A \subset X$. Die Abbildung $f|A : A \to X, a \mapsto f(a)$, heißt die Einschränkung von f auf A.
[3] $id_X : X \to X, x \mapsto x$, ist die sogenannte IDENTITÄT auf X.
[4] $Y^X := \{f \in P(X \times Y) \mid f \text{ ist Abbildung}\}$ ist eine Menge nach **(POT)** und **(SPEZ)**. Sie ist die Menge aller Abbildungen von X nach Y.

Wann sind zwei Abbildungen gleich ?

Lemma 0.0.9. [6] *Sind $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ Abbildungen, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f = g$

(ii) $f(x) = g(x)$ *für alle* $x \in X$.

Beweis : $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $x \in X$. Dann existiert $y \in Y$ so dass $(x, y) \in f$.
$f = g \Rightarrow (x, y) \in g$. $(x, y) \in f \Rightarrow y = f(x)$, $(x, y) \in g \Rightarrow y = g(x)$, also $f(x) = g(x)$. Da $x \in X$ beliebig, ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $(x, y) \in f \Rightarrow y = f(x) = g(x)$, d.h. $(x, y) \in g$, also $f \subset g$. Analog: $g \subset f$. □

Bezeichnung

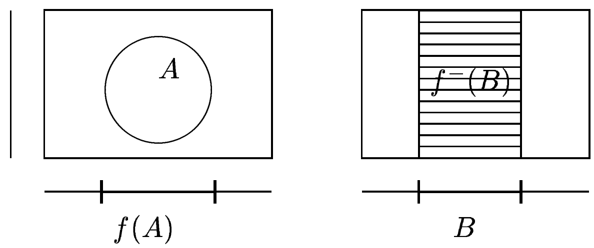
$f : X \to Y$ Abbildung, $A \subset X$, $B \subset Y$

$$\begin{aligned} f(A) &:= \{y \in Y \mid \text{Es gibt ein } a \in A, \text{ so dass } f(a) = y\} \\ &= \text{ Bild von A unter f} \\ f^-(B) &:= \{x \in X \mid f(x) \in B\} \\ &= \text{Urbild von B unter f} \end{aligned}$$

[6] (=Hilfssatz; manchmal wichtiger als ein Satz)

Speziell: $\mathit{bild}\, f := f(X)$ „Bild von f“
$f^{-}(y) := f^{-}(\{y\})$ „Faser von $y \in Y$“

EX: (Projektion auf die 1. Koordinate) $pr_1 : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$



Definition 0.0.10. $f : X \to Y$ *Abbildung*

(1) f *injektiv:* $\Leftrightarrow f(x) \neq f(x')$ *für alle* $x, x' \in X, x \neq x'$

(2) f *surjektiv:* $\Leftrightarrow$ *Zu jedem* $y \in Y$ *gibt es ein* $x \in X$ *so dass* $y = f(x)$

(3) f *bijektiv:* $\Leftrightarrow f$ *injektiv und surjektiv.*

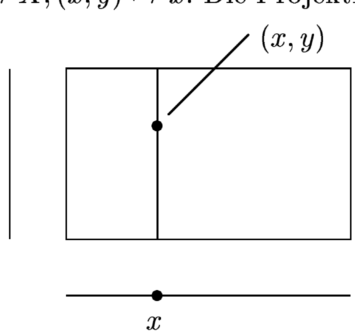
Offenbar ist f surjektiv genau dann, wenn $\mathit{bild}\, f = Y$.

Interpretation: $f : X \to Y$ Abbildung

- injektiv : Für ein $y \in Y$ hat die Gleichung $y = f(x)$ höchstens eine Lösung.
- surjektiv: Für jedes $y \in Y$ hat die Gleichung $y = f(x)$ wenigstens eine Lösung.
- bijektiv: Für jedes $y \in Y$ hat die Gleichung $y = f(x)$ genau eine Lösung.

EX:

[1] $sh : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$. Der „shift“ sh ist injektiv aber nicht surjektiv.
[2] $pr_1 : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$. Die Projektion pr_1 ist surjektiv aber i.a. nicht injektiv.



[3] $sq : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$. Die Quadrierung ist weder injektiv noch surjektiv.

MORAL: Es gibt Abbildungen, die weder injektiv noch surjektiv sind.

Definition 0.0.11 (Komposition). *$f : X \to Y,\ g : Y \to Z$. Dann heißt*

$$g \circ f := \left\{ (x,z) \in X \times Z \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{Es existiert ein } y \in Y \text{ so dass} \\ (x,y) \in f \text{ und } (y,z) \in g \end{array} \right\}$$

die Komposition g nach f.

Bemerkung 0.0.12.

(1) $g \circ f : X \to Z$ Abbildung, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (Üb)

(2) Selbst wenn $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert sind, ist im allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{sq} \mathbb{Z} \xrightarrow{sh} \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} sh \circ sq(n) &= n^2 + 1 \\ sq \circ sh(n) &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} sh \circ sq(n) = sq \circ sh(n) &\Leftrightarrow n^2 + 1 = (n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow n = 0 \end{aligned}$$

Daher ist

$$sh \circ sq \neq sq \circ sh \quad (\text{nach } 0.0.9)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend left=50, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] \arrow[rrr, bend right=50, "h \circ (g \circ f)"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & Z \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

$$\text{S} \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Beweis: (Üb)

Theorem 0.0.13. [7] *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung*

äq

(i) f bijektiv

(ii) Es existiert genau eine Abbildung $g : Y \to X$ so dass $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$.

[7](=wichtiger Satz)

Bezeichnung:
Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so heißt die durch f 1-deutig bestimmte Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y, g \circ f = id_X$ die Umkehrabbildung von f ; sie wird mit f^{-1} bezeichnet.
Ist f bijektiv, so ist auch f^{-1} bijektiv und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

EX:

Die Abbildung $sh_+ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$ ist bijektiv
ebenso wie $sh_- : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n-1$,
und es gilt $sh_- = (sh_+)^{-1}, (sh_-)^{-1} = (sh_+)$

Folgerung 0.0.14. *Sei $X \overset{\varphi}{\to} Y \overset{\psi}{\to} Z$ so dass $\varphi,\ \psi$ bijektiv. Dann ist auch $\psi \circ \varphi$ bijektiv und es gilt $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$.*

Beweis der Folgerung: Ist φ, ψ bijektiv, so existiert φ^{-1}, ψ^{-1} und $\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ ist definiert. Nach dem Assoziativgesetz der Komposition ist $(\psi \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}) = id_Z$ und $(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi) = id_X$, d.h. $\psi \circ \varphi$ ist bijektiv und $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ wegen der 1-deutigkeit der Umkehrabbildung. $\square$

Beweis des Theorems 0.0.13: $(ii) \Rightarrow (i)$: Da $g \circ f = id_X$, ist $g \circ f$ insbesondere injektiv, also auch f injektiv nach A1.4. Die Surjektivität von f folgt ebenfalls nach A1.4 aus der von $f \circ g = id_Y$.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Definiere die Menge g durch $g := \{(y, x) \in Y \times X | (x, y) \in f\}$.
g ist überall definiert, also F1, da f surjektiv. g ist wohldefiniert, also F2, da f injektiv, d.h. $g : Y \to X$ ist tatsächlich eine Abbildung. Sei $(x, x') \in g \circ f$. Dann gibt es ein $y \in Y$ so dass $(x, y) \in f, (y, x') \in g$, also $(x', y) \in f$. Da
f injektiv, ist $x = x'$, d.h. $g \circ f \subset id_X$. Sei umgekehrt $(x, x) \in id_X$. Dann gibt es ein $y \in Y$ so dass $(x, y) \in f$, also $(y, x) \in g$ und damit $(x, x) \in g \circ f$, d.h. $id_X \subset g \circ f$, also $g \circ f = id_X$.
$f \circ g = id_X$ beweist man analog. $\square$

Ist g eine weitere derartige Abbildung so ist

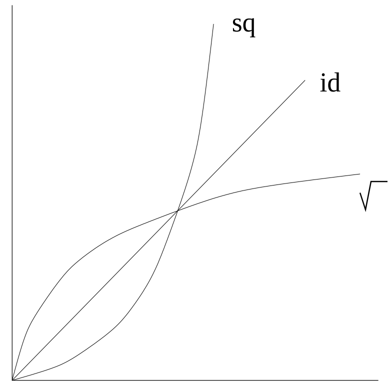
$$\tilde{g} = id_X \circ \tilde{g} = (g \circ f) \circ \tilde{g} = g \circ (f \circ \tilde{g}) = g \circ id_Y = g.$$

EX: $\overline{\mathbb{R}}_+$ Menge der nicht-negativen reellen Zahlen

sq: $\overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+, x \mapsto x^2$

$\sqrt{\ }$: $\overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+, x \mapsto \sqrt{x}$

$sq^{-1} = \sqrt{\ }$


sq
id
√

0.1 Reelle Zahlen

Eine Verknüpfung auf $\emptyset \neq G$ ist nichts anderes als eine Abbildung

$$* : G \times G \to G, (x, y) \mapsto x * y$$

Definition 0.1.0 (Gruppe). *$(G,*)$ Gruppe* $:\Leftrightarrow$

G0: $*$ *ist eine Verknüpfung auf* G

G1: $x * (y * z) = (x * y) * z$ *für alle* $x, y, z \in G$

G2: Es gibt ein $e \in G$ *so dass* $e * x = x * e = x$ *für alle* $x \in G$

G3: Zu jedem $x \in G$ *gibt es ein* $x' \in G$ *so dass* $x * x' = x' * x = e$

Ist außerdem

G4: $x * y = y * x$ *für alle* $x, y \in G$ *so heißt* G *abelsche* [8] *Gruppe.*

EX:

[1] $(\mathbb{Z}, +)$ abelsche Gruppe bzgl. $(n, m) \mapsto n + m$.
[2] $\emptyset \neq X, Aut(X) := \{f : X \to X bijektiv\}$
$(Aut(X), \circ)$ Gruppe bzgl. der Komposition $(f, g) \mapsto f \circ g$.
Die Automorphismengruppe ist i.a. nicht abelsch.

Lemma 0.1.1. *Sei* G *eine Gruppe. Dann gilt:*

(1) Das neutrale Element e *ist 1-deutig bestimmt.*

(2) Das zu $x \in G$ *inverse Element* $x' \in G$ *ist durch* x *1-deutig bestimmt.*

Beweis: Vorlesung Lineare Algebra I.

Folgerung 0.1.2. *In jeder Gruppe gilt*

(1) $e' = e$

(2) $(x')' = x$

(3) $(x * y)' = y' * x'$

(4) Zu $a, b \in G$ *existiert genau ein* $x \in G$ *, nämlich* $a' * b$ *, mit* $a * x = b$ *.*

Beweis: Vorlesung Lineare Algebra I.

(4) besagt, dass für festes $g \in G$, die Abbildung

$$G \to G, x \mapsto g * x$$

bijektiv ist.

Konvention bei (abelschen) Gruppen

[8] Nils Hendrik Abel(1802-1829), norweg. Mathematiker

$*$	e	x'	$x * y'$	$x * x$
$+$	0	$-x$	$x - y$	$2 \cdot x$
$\cdot$	1	x^{-1}	x/y	x^2

Definition 0.1.3 (Körper). $(k, +, \cdot)$ *Körper* :$\Leftrightarrow$
k ist eine Menge zusammen mit zwei Verknüpfungen

$+ \quad : k \times k \to k, (x, y) \mapsto x + y$ *(„Addition“)*

$\cdot \quad : k \times k \to k, (x, y) \mapsto x, y$ *(„Multiplikation“)*

derart, das gilt:

(ADD) $(k, +)$ *abelsche Gruppe mit neutralem Element* 0
$(k^* := k - \{0\})$
(MULT) $(k^*, \cdot)$ *abelsche Gruppe mit neutralem Element 1*
(DISTR) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *für alle* $a, b, c \in k$

Dass $(k^*, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, bedeutet insbesondere, dass die Multiplikation $\cdot$ das Produkt $k^* \times k^*$ nach k^* abbildet.

EX:

[1] $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper
[2] $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind Körper
[3] $\{0, 1\}$

$\#$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\bullet$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{F}_2 := (\{0, 1\}, \#, \bullet)$ Körper
$\mathbb{F}_2$ Baustein für binäre Codes.

Bemerkung 0.1.4. *In jedem Körper gilt*

(1) $1 \neq 0$

(2) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *oder* $y = 0$

(3) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$ *insbesondere:* $x \cdot y = (-x) \cdot (-y)$.

Beweis : (2): Ist $x = 0$, so ist $0 \cdot y = (0 + 0) \cdot y = 0 \cdot y + 0 \cdot y$, also
$0 = 0 \cdot y + (-(0 \cdot y)) = (0 \cdot y + 0 \cdot y) + (-(0 \cdot y)) = 0 \cdot y$. Ist umgekehrt $x \cdot y = 0$ und $x \neq 0$ und $y \neq 0$ so ist $y = x^-1 \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 = 0$.
(3): $x \cdot y + (-(x \cdot y)) = 0$ nach Definition $x \cdot y + (-x) \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y = 0$. Da Inverse 1-deutig bestimmt sind, ist $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$. □

Für k Körper, $X \subset k$, sei $-X := \{x \in k \mid -x \in X\}$

Definition 0.1.5 (Angeordneter Körper).
k angeordneter Körper $:\Leftrightarrow$ *Es gibt eine Teilmenge $k_+ \subset k$ so dass*

(ANORD)1	$k = -k_+ \cup \{0\} \cup k_+$ *paarweise disjunkt*
(ANORD)2	$x, y \in k_+ \Rightarrow x+y,\ x \cdot y \in k_+$

Dabei heißen zwei Mengen A, B disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$.

Lemma 0.1.6. *k angeordneter Körper*
$$x \in k, x \neq 0 \Rightarrow x^2 \in k_+$$

Insbesondere: $1 \in k_+, 1+1 \neq 0$

Beweis : $0 \neq x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x), x$ oder $-x \in k_+$ □

EX: $\mathbb{F}_2$ kann man <u>nicht</u> anordnen.

Definition 0.1.7. *k angeordneter Körper, $x, y \in k$, $\overline{k}_+ := k_+ \cup \{0\}$* 03/11/99

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in k_+ \ (\text{„}x \text{ kleiner als } y\text{“})$$
$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in \overline{k}_+ \ (\text{„}x \text{ kleiner oder gleich } y\text{“})$$

EX: $1 > 0$

Satz 0.1.8. *$\leq$ ist eine lineare Ordnungsrelation auf k, d.h.*

ORD1:	$x \leq x$	*(Reflexivität)*
ORD2:	$x \leq y\ ,\ y \leq x \Rightarrow x = y$	*(Antisymmetrie)*
ORD3:	$x \leq y\ ,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$	*(Transitivität)*
ORD4:	*Für alle x, y gilt genau eine der drei Aussagen:* $x < y\ ,\ x = y\ ,\ y < x$	

Beweis: Folgt unmittelbar aus **(ANORD)1/2**.

Folgerung 0.1.9.

(1) $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x + a \leq y + a$ *für alle* $a \in k$

(2) $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot x \leq a \cdot y$ *für alle* $a \in k_+$

(3) $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad -y \leq -x$

(4) $0 < x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.

Beweis – exemplarisch (2) und (3): (2): $x \leq y \Rightarrow y - x \in \overline{k}_+$. Ist $y - x = 0$, $a \in k_+$ so ist $a \cdot (y-x) = a \cdot y - a \cdot x = 0$, also $a \cdot y \geq a \cdot x$. Ist $y - x \in k_+, a \in k_+$, so ist auch $a \cdot (y-x) = a \cdot y - a \cdot x \in k_+$, also $a \cdot x \leq a \cdot y$. Da $1 \in k_+$ ist die Umkehrung trivial.
(4): Es genügt zu zeigen, dass $0 < x \leq y$ die Ungleichung $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ impliziert. Nach (2) ist zunächst $0 < x \cdot y$, also $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{x \cdot y} \in \overline{k}_+$ da sonst $y - x < 0$, d.h. $0 \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$. Da $\frac{1}{y} \neq 0$, ist $\frac{1}{y} > 0$. □

Definition 0.1.10. *k angeordneter Körper, $T \subset k$ T induktiv* $:\Leftrightarrow$

$I_1 :\ 0 \in T$

$I_2 :\ x \in T \Rightarrow x + 1 \in T$

Beispielsweise ist k selbst, $\overline{k}_+$ und $\{0\} \cup \{x \in k \mid x \geq 1\}$ induktiv. Insbesondere ist

$$J := \{T \in Pk \mid T \text{ induktiv } \} \neq \emptyset$$

und

$$\mathbb{N} := \bigcap_{T \in J} T \neq \emptyset$$

Offenbar gilt: 5/11/99

(1) $0 \in \mathbb{N}$

(2) $n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \Rightarrow n \geq 1$

(3) $\mathbb{N}$ kleinste induktive Menge in k d.h. $\mathbb{N}$ ist induktiv und ist $T \subset k$ induktiv, so ist $\mathbb{N} \subset T$.

Per definitionem ist die so definierte Menge $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Man kann zeigen, dass sie nicht von k abhängt, genauer:
Ist k ein angeordneter Körper mit den neutralen Elementen 0,1, k' ein weiterer angeordneter Körper mit den neutralen Elementen $0', 1'; \mathbb{N} \subset k$ die kleinste induktive Menge in k und $\mathbb{N}' \subset k'$ die kleinste induktive Menge in k', so gibt es genau eine Bijektion

$$' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}',\ n \longmapsto n'$$

so dass

$$\begin{array}{ccc} (n+1)' & = & n' + 1' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Addition in } k & & \text{Addition in } k' \end{array}$$

d.h. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}'$ unterscheiden sich gewissermaßen nur „typographisch “.

Plausibilitätsbetrachtung:

$\mathbb{N}_{naiv} := \{0, 1, 2 = 1 + 1,\ 3 = (1 + 1) + 1, \dots\}$

- $\mathbb{N}_{naiv} \subset \mathbb{N}$
- $\mathbb{N}_{naiv}$ induktiv

also $\mathbb{N}_{naiv} = \mathbb{N}$

Wo liegt eigentlich das Problem ?! ...

Definition 0.1.11.

(1) $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \bigcup -\mathbb{N}$

(2) $\mathbb{Q} := \left\{ x \in k \mid \textit{Es gibt } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \textit{ so dass } x = \frac{p}{q} \right\}$

$\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen.

Bemerkung 0.1.12. *Für jeden angeordneten Körper k gilt*

(1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset k$

(2) *$\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper mit der Anordnung $\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \bigcap k_+$; $\mathbb{Q}$ ist tatsächlich der „kleinste“ Körper, der $\mathbb{N}$ umfasst.*

(3) *$\mathbb{Q}$ ist wieder 1-deutig in folgendem Sinne: Ist $\mathbb{Q}'$ induziert von k', so existiert genau eine Bijektion*

$$' : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}',\ r \mapsto r'$$

so dass

$$\begin{array}{ccc} (r \underset{\cdot}{+} s)' & = & r' \underset{\cdot}{+} s' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \textit{in } k & & \textit{in } k' \end{array}$$

insbesondere

$$\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p'}{q'}$$

Satz 0.1.13 (Induktionsprinzip). *$T \subset \mathbb{N}$ so dass*

(1) $0 \in T$

(2) $n \in T \Rightarrow n + 1 \in T$

Dann ist $T = \mathbb{N}$

Beweis : $T \in J \Rightarrow \mathbb{N} \subset T$ □

Lemma 0.1.14. $n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \underset{\cdot}{\pm} m \in \mathbb{Z}$

[HS] $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{Z}$

Beweis : $T := \{n \in \mathbb{N} \mid n - 1 \in \mathbb{Z}\}$ induktiv, also $T = \mathbb{N}$ □

Beweis des Lemmas – exemplarisch für $n + m \in \mathbb{Z}$:
Sei $T := \{n \in \mathbb{N} \mid n + m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{Z}\}$ Offenbar ist $0 \in$ T. Sei n $\in$ T. Dann ist für alle $m \in \mathbb{Z}$ die Summe $n + m \in \mathbb{Z}$. Ist $n + m \geq 0$, so ist $n + m \in \mathbb{N}$, also auch $(n + 1) + m = (n + m) + 1 \in \mathbb{N}$. Ist $n + m < 0$, so ist $-n - m \in \mathbb{N}$, also nach **[HS]** $-n - m - 1 \in \mathbb{Z}$ und damit $(n + 1) + m \in \mathbb{Z}$, d.h. $(n + 1) + m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$, also $n + 1 \in T$. Folglich ist $T = \mathbb{N}$, d.h. $n + m \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{Z}$. Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \notin \mathbb{N}$: Dann ist $-n \in \mathbb{N}$ und damit $-n + m \in \mathbb{Z}$ für alle m $\in \mathbb{Z}$. Da mit m auch $-m \in \mathbb{Z}$ ist, also $-n - m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$, ist $n + m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. □

Folgerung 0.1.15. *$n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$ so dass $n \leq x \leq n+1$, dann ist*

$$x = n \text{ oder } x = n+1.$$

Zwischen der ganzen Zahl n und $n+1$ liegt also keine weitere ganze Zahl.

Beweis : $0 \leq x - n \leq 1, x - n \in \mathbb{N}$. Ist $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$, so ist $m \geq 1$. □

Bezeichnung

Für $x_j \in k,\ 0 \leq j \leq n,\ j \in \mathbb{N}$ sei

$$\sum_{j=o}^{n} x_j := (((\ldots(x_0 + x_1) + x_2) + \ldots + x_n)$$

und

$$\prod_{j=0}^{n} x_j := (((\ldots(x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot \ldots \cdot x_n)$$

Die Summe und das Produkt ist unabhängig von der Beklammerung und der Reihenfolge.

Für $x \in k, n \in \mathbb{N}$ sei

$$x^n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ x^1 & n = 1 \\ x \cdot x^{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

Ist x $\neq 0$ so ist per definitionem

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}$$

RECHENREGELN (falls definiert) $x, y \in k,\ n, m \in \mathbb{Z}$

(1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

(2) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

(3) $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

EX:

[1] **(Geometrische Summe)** $1 \neq x \in k,\ n \in \mathbb{N}$

$$Ⓢ \quad \sum_{j=0}^{n} x^j = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Beweis :

$$T := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right\} \text{ induktiv}$$

□

[2] **(Bernoulli'sche Ungleichung**[9]**)** k angeordneter Körper, $x \in k$ so dass $-1 < x$

$$Ⓢ \quad (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Beweis : $T := \{n \in \mathbb{N} | (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x\}$ induktiv □

Satz 0.1.16 (Verschiebung des Induktionsanfangs). *$W \subset \mathbb{Z}, m_* \in \mathbb{Z}$ so dass*

(1) $m_* \in W$

(2) $m \in W, m \geq m_* \Rightarrow m + 1 \in W$

Dann ist $\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq m_*\} \subset W$.

Beweis : $m \geq m_*, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $m = m_* + n$.
$T := \{n \in \mathbb{N} \mid m_* + n\}$ induktiv, also $T = \mathbb{N}$ □

EX: (Verschärfte Bernoullische Ungleichung)

$(1+x)^n > 1 + n \cdot x$ für $x > -1 (x \neq 0), n \geq 2$
$W := \{m \in \mathbb{Z} \mid (1+x)^m > 1 + m \cdot x\}$ Offenbar 0,1 $\notin W$. Für $m_* = 2$ ist $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ da $x^2 > 0$, d.h. 2 $\in$ W. Ist
$n \in W,\ n \geq 2$ so ist $(1+x)^n > 1 + n \cdot x$. Da $1 + x > 0$ folgt
$(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x$ d.h. $(n+1) \in W$ und daher $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\} \subset W$

Theorem 0.1.17. *: Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$*

Beweis : Sei

$$\mathbb{N}_{gerade} := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt ein m} \in \mathbb{N} \text{ so dass } n = 2m\}$$

die Menge der geraden natürlichen Zahlen und

$$\mathbb{N}_{ungerade} := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt ein m} \in \mathbb{N} \text{ so dass } n = 2m + 1\}$$

die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Dann gilt

$$(1)\ \mathbb{N}_{gerade} \bigcap \mathbb{N}_{ungerade} = \emptyset$$

$$(2)\ \mathbb{N}_{gerade} \bigcup \mathbb{N}_{ungerade} = \mathbb{N}$$

da

$$T := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ so dass } n = 2m \text{ oder } n = 2m + 1\ \}$$

induktiv ist und $2 \cdot p > 1$ für $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$.

Angenommen, es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, so dass $x^2 = 2$. Sei Œ[10] $x = \frac{p}{q}$,
$p,\ q \in \mathbb{N},\ q \neq 0$, nicht beide gerade, also $p^2 = 2q^2$. Daher ist zunächst p^2 gerade. Dann muss

[9]Jakob Bernoulli (1654 - 1705), schweizer Gelehrtenfamilie
[10]=ohne Einschränkung

aber p selbst gerade sein, etwa $p = 2m$ und daher $2m^2 = q^2$ also q gerade, ein Widerspruch. $\square$

Problem: Welche Eigenschaft eines angeordneten Körpers garantiert, dass man in k „Wurzeln ziehen kann“ ?

k angeordneter Körper, $s, c \in k,\ X \subset k$ 9/11/99

Definition 0.1.18.

(1) c obere (untere) Schranke von X $:\Leftrightarrow x \leq c$ $(c \leq x)$ für alle $x \in X$.

(2) X nach oben (unten) beschränkt $:\Leftrightarrow$ X besitzt eine obere (untere) Schranke.

(3) s Supremum (Infimum) von X $:\Leftrightarrow$

(I) s obere (untere) Schranke von X

(II) Ist c irgendeine obere (untere) Schranke von X so ist $s \leq c$ $(c \leq s)$.

EX:

[1] Jedes Element von k ist eine obere/untere Schranke von $\emptyset \subset k$. $\emptyset$ besitzt aber kein Supremum/Infimum.
[2] Jedes Element von $-k_+$ ist untere Schranke von k_+ und 0 ist ein Infimum von k_+ aber $0 \notin k_+$.
[3] $\frac{3}{2}$ ist eine obere Schranke in $\mathbb{Q}$ von $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. Aber diese Menge hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$, da für ein Supremum s notwendigerweise $s^2 = 2$ ist (vgl. 0.1.30).

Lemma 0.1.19. *Eine Menge $X \subset k$ hat höchstens ein Supremum (Infimum).*

Beweis : Sind s, s' zwei Suprema in X , so ist $s \leq s'$ und $s' \leq s$, also $s = s'$. $\square$

Bezeichnung
Besitzt eine Menge $X \subset k$ ein Supremum (Infimum), so wird dieses mit $\sup X$ $(\inf X)$ bezeichnet. Ist sogar $\sup X \in X$ $(\inf X \in X)$ so spricht man vom Maximum (Minimum) von X :

$$\max X := \sup X, \quad falls \quad \sup X \in X$$

$$\min X := \inf X, \quad falls \quad \inf X \in X.$$

EX: $0 = \inf k_+$, aber k_+ hat kein Minimum; $0 = \min \overline{k}_+$.

Lemma 0.1.20. *Hat die Menge $X \subset k$ ein Supremum, so hat die (gespiegelte) Menge $-X$ ein Infimum und es gilt*

$$-\sup X = \inf(-X).$$

Beweis : $s = \sup X \Rightarrow x \leq s$ für alle $x \in X \Rightarrow -s \leq -x$ für alle $x \in X$, d.h. $-s$ untere Schranke von $-X$. Ist c irgendeine untere Schranke von $-X$, d.h. $c \leq -x$ für alle $x \in X$, so ist $x \leq -c$ für alle $x \in X$, also $s \leq -c$, d.h. $c \leq -s$. Damit ist $-s$ das Infimum von $-X$. $\square$

Lemma 0.1.21. *Sei $X \subset k$, $s \in k$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) $s = \sup X$

(ii) *s obere Schranke von X, und zu jemdem $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in k$, gibt es ein $x \in X$ so dass $s - \varepsilon < x \leq s$.*

Beweis : (i) $\Rightarrow$ (ii): Jedes Supremum ist insbesondere eine obere Schranke. Gäbe es zu $\varepsilon > 0$ kein $x \in X$ mit $s - \varepsilon < x$, so wäre $x \leq x - \varepsilon$ für alle $x \in X$, d.h. $s - \varepsilon$ obere Schranke, also da $s = \sup\ X$, $s \leq s - \varepsilon$, d.h. $0 < -\varepsilon$, ein Widerspruch.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $c \in k$ irgend eine obere Schranke von X und $c < s$. Dann ist $\varepsilon := s - c > 0$. Daher gibt es ein $x \in X$ mit $c = s - (s - c) < x \leq s$, ein Widerspruch. $\square$

Definition 0.1.22 (Supremumsaxiom). *k angeordneter Körper.*
k heißt nach oben vollständig $:\Leftrightarrow$ ***(SUP)*** *Jede nach oben beschränkte nicht-leere Menge $\emptyset \neq X \subset k$ hat ein Supremum.*

Theorem 0.1.23. *(ohne Beweis) Es gibt (bis auf Isomorphie) genau einen angeordneten Körper mit* ***(SUP)*** *- den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.*

Bis auf Isomorphie heißt Folgendes: Ist $\mathbb{R}'$ ein zweiter derartiger Körper, so existiert genau eine Bijektion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}',\ x \longmapsto x'$$
so dass

(1) $(x \dot{+} y)' = x' \dot{+} y'$

(2) $x < y \Leftrightarrow x' < y'$

Da $\mathbb{R}$ angeordnet, ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}_+$ ist die Menge der positiven Zahlen,

$-\mathbb{R}_+$ die Menge der negativen und

$\overline{\mathbb{R}}_+$ die der nicht-negativen Zahlen.

$\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \cap \mathbb{R}_+ = \{n \in N \mid x \geq 1\}$.

$\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$

$\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}_+$

Ist $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ nach unten beschänkt, so ist $-X$ nach oben beschränkt. Daher existiert $\inf\ X$ und es gilt
$$\inf\ X = -\sup\ (-X).$$

Satz 0.1.24. *$\emptyset \neq X \subset \mathbb{Z}$ nach oben (unten) beschränkt. Dann existiert* $\max X$ $(\min X)$.

Beweis : $\emptyset \neq X$ nach oben beschränkt, $s = \sup X, 0 < \epsilon < 1$. Dann gibt es ein $n \in X$, so dass $s - \epsilon < n \leq s$. Ist $n = s$, so ist $\sup X = \max X = n \in X$. Anderfalls ist $s - n < s$. Dann gibt es ein $m \in X$ so dass $s - \epsilon < n < m \leq s$ d.h. $0 < m - n < 1, m - n \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch □

Theorem 0.1.25 (Satz von Archimedes[11]). *Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ so dass $x < n$.*

Beweis : Sonst existiert $\sup \mathbb{N}$ und ein $n_* \in \mathbb{N}$ mit $\sup \mathbb{N} - 1 < n_* \leq \sup \mathbb{N}$, d.h. $\sup \mathbb{N} < n_* + 1 \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch. □

Folgerung 0.1.26. $\inf\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} = 0$

Beweis : $\inf\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} =: i$ existiert, $i \geq 0$. Wäre $i > 0$, so existierte ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{i} < n$, also $\frac{1}{n} < i$, ein Widerspruch. □

Folgerung 0.1.27.

(1) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $[x] \in \mathbb{Z}$ so dass $[x] \leq x < [x] + 1$ („größte ganze Zahl $\leq x$“)

(2) zu $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$, gibt es ein $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ so dass $a < \frac{p}{q} < b$.

Beweis : (1): Nach Archimedes gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so dass $x - 1 < m$. Sei $[x] := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid x - 1 < m\}$. Dann ist zunächst $x < [x] + 1$. Wäre $x < [x]$, so wäre $x - 1 < [x] - 1$, also $[x] \leq [x] - 1$, ein Wiederspruch. Ist $m \in \mathbb{Z}$ und ebenfalls $m \leq x < m + 1$ so ist Œ $[x] \leq m \leq x < [x] + 1$, also $m = [x]$.
(2): Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $N(b - a) > 1$. Damit ist insbesondere
$N \neq 0,\ N \cdot a < [Na] + 1 < N \cdot b$, da sonst
$1 = [Na] + 1 - [Na] \geq N \cdot b - [Na) \geq N \cdot b - N \cdot a > 1$; $a < \frac{[Na]+1}{N} <$ b ist die gesuchte rationale Zahl. □

Definition 0.1.28. *$I \subset \mathbb{R}$ Intervall $:\Leftrightarrow$ für alle $a, b \in I, a \leq b$ ist* 10/11/99
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \subset I$

EX:

[1] $\mathbb{R},\ \overline{\mathbb{R}}_+,\ \mathbb{R}_+$ Intervalle
[2] $[a, b]$ ist ein sogenanntes abgeschlossenes Intervall mit den Grenzen a, b
[3] $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ein sogenanntes offenes Intervall mit den Grenzen a, b.

Theorem 0.1.29 (Intervallschachtelungsprinzip). $a_n,\ b_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, *so dass*

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.
Dann ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

[11] Archimedes von Syrakus (287-212 v. Chr) griech. Philosoph

genauer:[12] *Mit* $a := \sup\ a_n \leq \inf\ b_n =: b$, *gilt*

$$[a, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

Zusatz: Ist $\inf\ (b_n - a_n) = 0$, *so besteht das Intervall* $[a, b]$ *aus genau einem Punkt, nämlich* $a = b$.

EX:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n+1}\right] = \{0\}$$

aber

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n+1}\right) = \emptyset.$$

Beweis : Für festes $m \in \mathbb{N}$ ist $a_n \leq b_m$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $a := \sup a_n \leq b_m$, folglich $a \leq b := \inf b_m$ und $\emptyset \neq [a, b] \subset \bigcap_{m\in\mathbb{N}}[a_m, b_m]$. Sei $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}}[a_m, b_m]$. Dann ist $a_m \leq x \leq b_m$ für alle m, d.h. $a \leq x \leq b$. □

Theorem 0.1.30 (N-te Wurzel). *Zu* $N \in \mathbb{N}_+$ *und* $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *gibt es genau ein* $\xi \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *so dass* $\xi^N = x$.

ξ heißt die N-te Wurzel von x, $\sqrt[N]{x} := x^{\frac{1}{N}} := \xi$.

Folgerung 0.1.31. *Die Abbildung* $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $n \in \mathbb{N}_+$, *hat folgende Eigenschaften*

(1) $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$

(2) $0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$

(3) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$
Insbesondere: $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$

(4) $\sqrt[n]{x}\ \sqrt[m]{x} = \sqrt[n\cdot m]{x^{n+m}}$, $n, m \in \mathbb{N}_+$

Beweis : Vorbemerkung: $0 < y \leq z \Leftrightarrow 0 < y^n \leq z^n$ (Induktion). Daher ist ξ 1-deutig, falls existent. Œ $x > 0$. $X := \{y \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mid y^N \leq x\} \ni 0$. Wegen $(1+x)^N \geq 1+N\cdot x > x$ ist $1 + x$ obere Schranke von X, also existiert $\xi := \sup X$, $\xi \geq 0$. Nach Archimedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}_+$ mit $\frac{1}{n} < x$ also $(\frac{1}{n})^N \leq \frac{1}{n} < x$. damit ist sogar $\xi \geq \frac{1}{n} > 0$. Sei $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Dann ist $\frac{\xi^N}{(1-\frac{\epsilon}{N})^N} \geq x$ da sonst $\xi \geq \frac{\xi}{(1-\frac{\epsilon}{N})}$, d.h. $1 - \frac{\epsilon}{N} \geq 1$. Anderseits ist $\xi(1 - \frac{\epsilon}{N}) < \xi$. Daher gibt es ein $\eta \in X$ so dass $\xi(1 - \frac{\epsilon}{N}) < \eta \leq \xi$. Nach Bernoulli folgt

$$\xi^N(1 - \epsilon) \leq \eta^N \leq x \leq \frac{\xi^N}{(1 - \epsilon)}$$

also

$$1 - \epsilon \leq \frac{x}{\xi^N} \leq \frac{1}{1 - \epsilon}$$

Da diese Ungleichung für alle $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ gilt, ist $\frac{x}{\xi^N} = 1$. □

[12] $\sup\ a_n := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

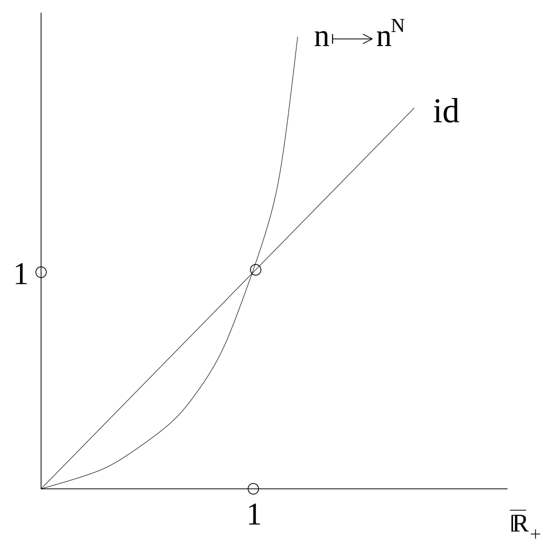
Folgerung 0.1.32.

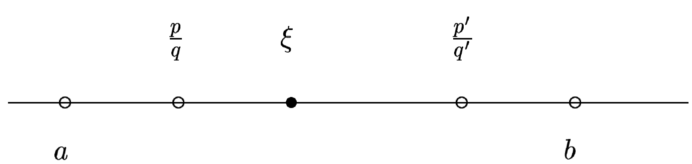
(1) $\overline{\mathbb{R}}_+ \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $t \mapsto t^N$, *surjektiv*[13]

(2) $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, *da* $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *(*$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ist die Menge der irrationalen Zahlen)*

(3) $\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid$ *Es gibt ein* $x \in \mathbb{R}^*$ *so dass* $x^2 = y\}$, *insbesondere lässt sich* $\mathbb{R}$ *nur auf eine Weise anordnen.*

(4) *Zu* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *gibt es eine irrationale Zahl* $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *so dass* $a < \xi < b$.





Wähle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ so dass $a < \frac{p}{q} < b$ und definiere

$$\xi := \frac{p}{q} + \frac{\sqrt{2}}{N}, N \gg 0, N \in \mathbb{N} \text{ ($N \gg 0$ bedeutet: N genügend groß)}$$

Problem: Gibt es „mehr“ irrationale oder mehr „rationale“ Zahlen ?

[13]surjektive Abbildungen werden mit „Doppelspitze“ $X \twoheadrightarrow Y$ bezeichnet, injektive mit $X \hookrightarrow Y$

0.2 Kombinatorik

Für eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ wird die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq N\}$ häufig einfach auch mit $\{0, 1, 2, \ldots N\}$ bezeichnet. 12/11/99

Lemma 0.2.0 (Aritmethische Summe). *$\varphi : \{0, 1, \ldots N\} \to \mathbb{N}$ injektiv. Dann existiert max (bildφ) und es gilt*

(1) $\max\ (bild\varphi) \geq N$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{N} \varphi(k) \geq \frac{N(N+1)}{2}$

Zusatz:

äq

(i) $max(bild\ \varphi) = N$

(ii) $bild\ \varphi = \{0, 1, \ldots N\}$

(iii) $\sum\limits_{k=0}^{N} \varphi(k) = \frac{N(N+1)}{2}$

Insbesondere: $1 + 2 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$

Beweis : Induktion. Es gibt natürliche Zahlen

$$0 \leq n_0 < n_1 < \ldots < n_N$$

so dass $bild\ \ \varphi = \{n_0, n_1, \ldots, n_N\}$, also $max(bild\ \ \varphi) = n_N \geq N$ und

$$\sum_{k=0}^{N} \varphi(k) = \sum_{k=0}^{N} n_k \geq \sum_{k=0}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$$

□

Folgerung 0.2.1. *$\varphi : \{0, 1, \ldots N\} \hookrightarrow \{0, 1, \ldots N'\}$ injektiv.*
Dann ist $N' \geq N$.

Definition 0.2.2. *Eine Menge X heißt endlich :⇔ Entweder ist $X = \emptyset$ oder aber es gibt eine Bijekion $\{0, 1, \ldots N\} \to X$ für ein geeignetes N. Eine nicht endliche Menge heißt unendlich.*

Sind $\varphi : \{0, 1, \ldots N\} \to X$ und $\psi : \{0, 1, \ldots N'\} \to X$ bijektiv so ist auch $\psi^{-1} \circ \varphi : \{0, 1, \ldots, N\} \to \{0, 1, \ldots N'\}$ bijektiv, insbesondere $N \leq N'$ und $N' \leq N$ d.h. $N = N'$. N ist also durch X 1-deutig bestimmt.

$$\#X := N + 1$$

heißt die Kardinalzahl von $X \neq \emptyset$. Ist $X = \emptyset$ so ist $\#X := 0$ per definitionem.

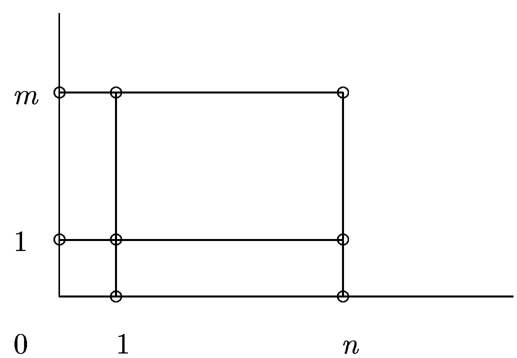
Satz 0.2.3. *X, Y endliche Mengen, $A \subset X$. Dann gilt*

(1) $\#A \leq \#X$

(2) $\#X \cup Y = \#X + \#Y - \#X \cap Y$

(3) $\#X \times Y = \#X \cdot \#Y$

(4) $\#Y^X = \#Y^{\#X}$



Beweis : (1) - (3): A 4.1
(4): Ist X oder Y leer, so ist ϕ die einzige Abbildung $X \to Y$, also $\#Y^X = \#Y^{\#X} = 1$. Ist $\#X = 1$ so entsprechen die Abbildungen $X \to Y$ den Punkten von Y also $\#Y^X = \#Y = \#Y^{\#X}$
Œ $\#X \geq 2$, $Y = \{0, 1, \ldots N\}$, $a \in X$. $X' := X \setminus \{a\}$. Nach Induktion ist $\#Y^{X'} = \#Y^{\#X'}$.
Definiere eine Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} \chi : Y^{X'} \times Y & \longrightarrow & Y^X \\ \Cup & & \Cup \\ (g, n) & \longmapsto & g_n \end{array}$$

durch

$$g_n(x) := \begin{cases} g(x) & x \in X' \\ n & x = a \end{cases}$$

χ hat die Umkehrabbildung $\varphi \to (\varphi | X', \varphi(a))$, d.h.

$$\#Y^X = \#(Y^{X'} \times Y) = \#Y^{\#X'} \cdot \#Y = \#Y^{\#X}$$

□

Folgerung 0.2.4. *X endlich $\Rightarrow \#PX = 2^{\#X}$.*

Beweis : Ist $X = \emptyset$ so ist $PX = \{\emptyset\}$, also $\#PX = 1 = 2^0$. Sei $X \neq \emptyset$. Definiere Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \chi : PX & \longrightarrow & \{0, 1\}^X \\ \Cup & & \Cup \\ U & \longmapsto & \chi_U \end{array}$$

durch

$$\chi_U : X \to \{0,1\}$$

$$\chi_U(x) := \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases} .$$

χ_U bezeichnet man auch als die „charakteristische“ Funktion von $U \subset X$.
χ hat die Umkehrabbildung

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \{0,1\}^X & \longrightarrow & PX \\ \cup & & \cup \\ f & \longmapsto & f^{-1}(1) \end{array}$$

wobei f eine beliebige Abbildung $X \to \{0,1\}$ ist. Da somit χ eine Bijektion von PX auf $\{0,1\}^X$ ist, gilt

$$\#PX = \#\{0,1\}^X = 2^{\#X}.$$

□

Folgerung 0.2.5 (Schubfachprinzip). $\emptyset \neq X, Y$ *endlich,* $\varphi : X \to Y$ *Dann gilt:*

(1) $\#X \leq \#Y$ *falls* φ *injektiv*

(2) $\#X \geq \#Y$ *falls* φ *surjektiv.*

Beweis : $\#X = \#bild\ \ \varphi \leq \#Y$ falls φ injektiv. Ist φ surjektiv, so sind sämtliche Fasern 16/11/99
$\emptyset \neq \varphi^-(y), y \in Y$, nicht leer und paarweise disjunkt, also

$$\#X = \sum_{y \in Y} \#\varphi^-(y) \geq \#Y.$$

Ist $\varphi : X \to Y$ surjektiv und $y \mapsto \#\varphi^-(y)$ konstant, so ist

$$\#X = \#\varphi^-(y) \cdot \#Y$$

(SCHÄFERPRINZIP) □

Folgerung 0.2.6. $\emptyset \neq X$ *endlich,* $\varphi : X \to X$ *Selbstabbildung*

äq

(i) φ *injektiv*

(ii) φ *surjektiv*

(iii) φ *bijektiv.*

Definition 0.2.7. $k, n \in \mathbb{N}$

(1) $n! := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)! & n > 0 \end{cases}$ *n-Fakultät*

(2) $\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & k \leq n \\ 0 & sonst \end{cases}$ *Binomialkoeffizient n über k.*

EX: $10! = 3.628.800$

Satz 0.2.8. *$\emptyset \neq X, Y$ endlich so dass $n := \#X \leq m := \#Y$. Dann gibt es genau*

$$\frac{m!}{(m-n)!}$$

injektive Abbildungen $X \hookrightarrow Y$.

Folgerung 0.2.9.

(1) $\emptyset \neq X$ endlich, $n := \#X$. Dann ist $\#Aut(X) = n!$

(2) Eine n-elementige Menge hat genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen.

Beweis : Œ $X = \{0, \dots, n-1\}$, $Y = \{0, \dots, m-1\}$,
$n \geq 2$ $X' := \{0, \dots, n-2\} \neq \emptyset$. Nach Induktion gibt es genau $\frac{m!}{(m-(n-1))!}$ injektive Abbildungen $\varphi : X' \hookrightarrow Y$. $\#(Y \setminus bild\ \varphi) = m - (n-1) \geq 1$ Definiere für $y \in Y \setminus bild\varphi$

$$\varphi_y : X \to Y,\ \varphi_y(x) := \begin{cases} \varphi(x) & x \in X' \\ y & x = n-1 \end{cases}$$

Die Abbildung φ_y ist injektiv. Ist umgekehrt $\psi : X \to Y$ injektiv, so ist $\psi|X'$ ebenfalls injektiv und $\psi = (\psi|X')_{\psi(n-1)}$. Daher gibt es genau

$$\frac{m!}{(m-(n-1))!}(m-(n-1))! = \frac{m!}{(m-n)!}$$

injektive Abbildungen $X \hookrightarrow Y$. □

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen

$$X \twoheadrightarrow Y,\ n := \#X \geq m := \#Y$$

ist wesentlich schwieriger zu bestimmen. Tatsächlich ist ihre Anzahl gerade

$$m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - ... + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}.$$

Eigenschaften 0.2.10.

(1) $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(3) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Die 2-te Eigenschaft entspricht der Achsen-Symmetrie des Pascal'schen[14] Dreiecks; die 3-te Eigenschaft der rekursiven Berechnung der Binomialkoeffizienten.

[14]Blaise Pascal (1623-1662), franz. Mathematiker

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

Satz 0.2.11. *$\mathbb{F}$ Körper, $x, y \in \mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis: Induktion/Indexverschiebung.

Folgerung 0.2.12.

(1) $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

(2) $0 = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Definition 0.2.13. *: X Menge* 17/11/99

(1) X höchstens abzählbar $:\Leftrightarrow$ Entweder ist $X = \emptyset$ oder aber es gibt eine Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow X$.

(2) X überabzählbar $:\Leftrightarrow$ X ist nicht höchstens abzählbar.

Satz 0.2.14. *Ist X eine endliche Menge, so ist X höchstens abzählbar.*

Beweis : Œ $X \neq \emptyset$, $\varphi : \{0, ..N\} \to X$ bijektiv. $\psi : \mathbb{N} \to \{0, ..N\}$,

$$\psi(n) := \begin{cases} n & n \leq N \\ N & n \geq N \end{cases}$$

ist surjektiv, also $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow X$. □

[HS] X, Y höchstens abzählbar, $A \subset X$.

Dann ist auch

(1) A höchstens abzählbar

(2) $X \cup Y$ höchstens abzählbar

(3) $X \times Y$ höchstens abzählbar.

WARNUNG: Y^X ist i.a. überabzählbar.

Ⓢ $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar.

Beweis : Angenommen,

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{N} & \twoheadrightarrow & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ \Cup & & \Cup \\ n & \mapsto & \varphi_n \end{array}$$

ist surjektiv, wobei φ_n eine Abbildung $\mathbb{N} \to \{0,1\}$ ist. Definiere die „Diagonalfolge“ $\Delta : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ wie folgt:

$$\Delta(n) := \begin{cases} 1 & \varphi_n(n) = 0 \\ 0 & \varphi_n(n) = 1 \end{cases}$$

Dann ist $\Delta \neq \varphi_n$ für alle n, also $\Delta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathit{bild}\varphi$, ein Widerspruch zur Surjektivität von φ. $\square$

Beweis des HS: Œ $X, Y, A \neq \emptyset$.
(1): $a \in A, \varphi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow X$ surjektiv. Definiere $\psi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ durch

$$\psi(x) := \begin{cases} \varphi(x) & x \in \varphi^{-}(A) \\ a & \mathit{sonst} \end{cases}$$

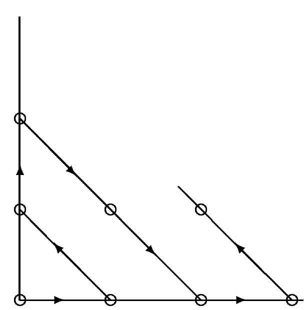
(2): $\iota : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (n,m) \mapsto \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)+m$, injektiv, also existiert eine Bijektion $\beta : \mathit{bild}\,\iota \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und eine Surjektion $\gamma : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathit{bild}\,\iota$ nach (1). Die Komposition $\beta \circ \gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist surjektiv, d.h. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist höchstens abzählbar.
$N_1 := \mathbb{N}_+ \times \{0\}$ und $N_2 := \{0\} \times \mathbb{N}_+$ sind disjunkte Teilmengen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, also ist $A := N_1 \cup N_2 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach Teil (1) höchstens abzählbar.
Konstruktion einer Bijektion

$$\chi : A \twoheadrightarrow X \cup Y :$$

Nach Voraussetzung existiert $\varphi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow X,\ \psi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y$. Setze
$\chi(n,0) := \varphi(n-1)$ für $(n,0) \in N_1$
$\chi(0,n) := \psi(n-1)$ für $(0,n) \in N_2$
Wegen $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ ist χ wohldefiniert und bijektive Abbildung von A auf $X \cup Y$. $\mathbb{N} \twoheadrightarrow A \xrightarrow{\chi} X \cup Y$.
(3):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \stackrel{\varphi \times \psi}{\longrightarrow} & X \times Y \\ \Cup & & \Cup \\ (n,m) & \longmapsto & (\varphi(n), \psi(m)) \end{array}$$

$\square$



Eine „Durchnumerierung“ von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Folgerung 0.2.15. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *höchstens abzählbar.*

Beweis : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{Z},\ (n,m) \mapsto n-m.\ \ \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus 0) \twoheadrightarrow \mathbb{Q},\ \ (p,q) \mapsto p/q.$ □

Theorem 0.2.16. $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Folgerung 0.2.17. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *überabzählbar.*

Es gibt also „mehr“ irrationale als rationale Zahlen - fast wie im richtigen Leben.

Beweis des Theorems: Angenommen $x : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{R}, n \mapsto x_n$, Surjektion, d.h. $\mathbb{R} = \{x_0, x_1, ...\}$ läßt sich „durchnumerieren“. Dann gibt es eine „Folge“ $I_n, n \in \mathbb{N}$, von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ so dass

(1) $I_{n+1} \subset I_n, n = 0, 1, 2, ..$

(2) $x_n \notin I_n$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es eine reelle Zahl

$$s \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{t \in \mathbb{R} \mid t \in I_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

Die so gefundene Zahl s kommt nicht unter den x_n vor, d.h. $s \neq x_n$ für alle n, da sonst

$$s = x_m \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset I_m$$

für ein $m \in \mathbb{N}$. Konstruktion der I_n:

(1) $a_0 := x_0 + 1 < b_0 := x_0 + 1, x_0 \notin I_0 := [a_0, b_0]$

(2) Zerlege $[a_0, b_0]$ in die drei Teilintervalle:

$$[a_0, a_0 + \frac{1}{3}(b_0 - a_0)]$$

$$[a_0 + \frac{1}{3}(b_0 - a_0), a_0 + \frac{2}{3}(b_0 - a_0)]$$

$$[a_0 + \frac{2}{3}(b_0 - a_0), b_0]$$

In wenigstens einem dieser Teilintervalle liegt <u>nicht</u> x_1. Sei $I_1 := [a_1, b_1]$ dasjenige Teilintervall mit kleinstem linken Randpunkt, in dem x_1 nicht liegt, also

$$x_1 \notin I_1 \subset I_0$$

(3) Konstruiere induktiv I_{n+1} aus I_n.

□

Ergänzung 0.2.18. *(nicht Teil der VL)*

Ⓢ $X \neq \emptyset$

äq

(i) X endlich

(ii) Es gibt eine Surjektion $\{0,\dots,N\} \twoheadrightarrow X$ für ein gegeignetes $N \in \mathbb{N}$.

Zusatz:

(1) $\#X = min\{N \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt eine Surjektion } \{0,\dots,N\} \twoheadrightarrow X\} + 1$

(2) Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.

Beweis : $(i) \Rightarrow (ii)$: Jede Bijektion $\{0,\dots,N\} \to X$ ist automatisch surjektiv.
$(ii) \Rightarrow (i)$: N minimal, $\varphi : \{0,\dots,N\} \twoheadrightarrow X$ surjektiv. Ist φ nicht injektiv, so gibt es $0 \leq n < m \leq N$ so dass $\varphi(n) = \varphi(m)$. Definiere
$\psi : \{0,\dots,N-1\} \to X$ durch

$$\psi(k) := \begin{cases} \varphi(k) & k < m \\ \varphi(k+1) & m \geq k \geq N-1. \end{cases}$$

ψ ist surjektiv, Widerspruch. □

Zusatz: Ist $\emptyset \neq A \subset X$, wähle $a \in A$, definiere $\tilde{\varphi} : \{0,\ N\} \to A$ durch

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi(n) & n \in \varphi^{-}A \\ a & n \notin \varphi^{-}A. \end{cases}$$

Ⓢ äq

(i) X unendliche Menge

(ii) Es gibt eine Injektion $\mathbb{N} \hookrightarrow X$.

Beweis : $(ii) \Rightarrow (i)$: $X \neq \emptyset$. Wäre X endlich, so existierte eine Bijektion
$X \to \{0,..,N\}$ für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$. Die Komposition
$\varphi : \{0,..,N+1\} \hookrightarrow X \to \{0,..,N\}$ ist dann injektiv, also
$N \geq max(bild(\varphi) \geq N+1$.
$(i) \Rightarrow (ii)$: $X \neq \emptyset$. Wähle $x_0 \in X$. Da X nicht endlich, gibt es ein $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$, also nach Induktion $x_k \in X, k \in \mathbb{N}$, paarweise verschieden, d.h. $k \mapsto x_k$ ist eine Injektion $\mathbb{N} \hookrightarrow X$. □

Ⓢ X höchstens abzählbar

äq

(i) X nicht endlich

(ii) Es gibt eine Bijektion $\mathbb{N} \to X$.

Beweis : $(ii) \Rightarrow (i)$: s.o.
$(i) \Rightarrow (ii)$: $X \neq \emptyset, \psi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow X$, insbesondere sind die Fasern
$\mathbb{N}_x := \psi^-(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$ und $min\ \mathbb{N}_x$ existiert. Außerdem gilt:

(1) $min\ \mathbb{N}_x = min\ \mathbb{N}_{x'} \Leftrightarrow x = x'$

(2) $\psi(min\ \mathbb{N}_x) = x$.

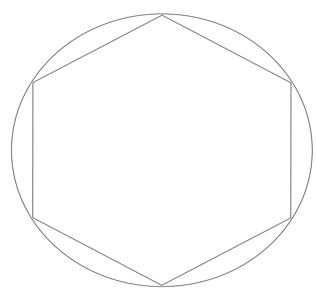
Definiere
$\pi(0) := min\{min\ \mathbb{N}_x \mid x \in X\}$,
$\pi(1) := min\{min\ \mathbb{N}_x \mid \pi(0) < min\ \mathbb{N}_x, x \in X\}$,
induktiv
$\pi(k) := min\{min\ \mathbb{N}_x \mid \pi(0) < \pi(1) < \ldots < \pi(k-1) < min\ \mathbb{N}_x,\ x \in X\}$.
Da X nicht endlich, ist π für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert; die Komposition
$\mathbb{N} \xrightarrow{\pi} \mathbb{N} \xrightarrow{\psi} X$ ist bijektiv. $\square$

Kapitel 1

Konvergente Folgen

1.0 Reelle Folgen und Reihen

Motivation: Ein einem Kreis K einbeschriebenes (regelmäßiges) n-Eck E_n 19/11/99



n=6

approximiert die Fläche des Kreises:

$$\text{Fläche } (E_n) \approx \text{ Fläche}(K) \text{ falls } n \gg 0.$$

Die mathematisch präzise Fassung solcher oder ähnlicher Approximationsprozesse führt zum Begriff der KONVERGENZ - dem zentralen Begriff der Analysis.

Definition 1.0.0. $x \in \mathbb{R}$. *Dann heißt*

$$|x| := \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

der (Absolut)betrag von x.

Offenbar ist

(1) $-|x| \leq x \leq |x|$

(2) $|x|^2 = x^2$, *d.h.* $|x| = \sqrt{x^2}$

Satz 1.0.1. *Die Abbildung*

$$| \ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|,$$

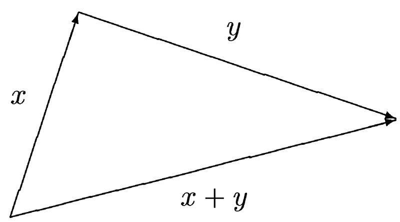
hat folgende Eigenschaften

N1: $|x| \geq 0, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

N3: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

$N3$ ist die sogenannte Δ - Ungleichung („Dreiecksungleichung“).



Grob gesprochen ist die Analysis die Theorie der Δ - Ungleichung.

Beweis :

N1: $|x| = \sqrt{x^2}$.

N2: Œ $x \cdot y \neq 0$. Ist $x \cdot y > 0$ so ist $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$. Ist $x \cdot y < 0$ so ist $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

N3: $|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$. Da das $\sqrt{\ }$ -ziehen monoton ist, folgt $|x + y| \leq |x| + |y|$.

□

Folgerung 1.0.2.

(1) $|0| = 0, \ |1| = 1$

(2) $|-x| = |x|$

(3) $\Big||x|\Big| = |x|$

(4) $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$ *falls* $x \neq 0$

(5) $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$

(6) $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

Die Eigenschaft (6) ist die sogenannte „verschärfte Δ -Ungleichung" ; ihr Beweis beruht auf dem „Fundamentaltrick" der Analysis:

$$|x| = |x + (y - y)| = |(x + y) + (-y)| \leq |x + y| + |y|, \text{ d.h.} |x| - |y| \leq |x + y|$$

In dem man x und y vertauscht, findet man

$$|y| - |x| \leq |y + x|$$

also

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x + y|.$$

Indem man y durch $-y$ ersetzt, folgt

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

Mit Hilfe des Absolutbetrages kann man den „Abstand" zweier reeller Zahlen messen:

Satz 1.0.3. *Die „Abstandsfunktion"*

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y) := |x - y|$$

hat folgende Eigenschaften:

M1: $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2: $d(x, y) = d(y, x)$

M3: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Außerdem ist sie translationsinvariant, d.h.

$$d(x + a, y + a) = d(x, y) \text{ für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Definition 1.0.4. *X Menge, $\alpha : \mathbb{N} \to X$.*
Dann heißt α eine $X - Folge$ mit dem n-ten Folgeglied $\alpha_n := \alpha(n)$.

Ist $X = \mathbb{R}$ so spricht man von einer reellen Folge. Häufig werden Folgen auch als (unendliche) Tupel geschrieben:

$$\alpha = (\alpha_n) = (\alpha_n)_{n \geq 0}.$$

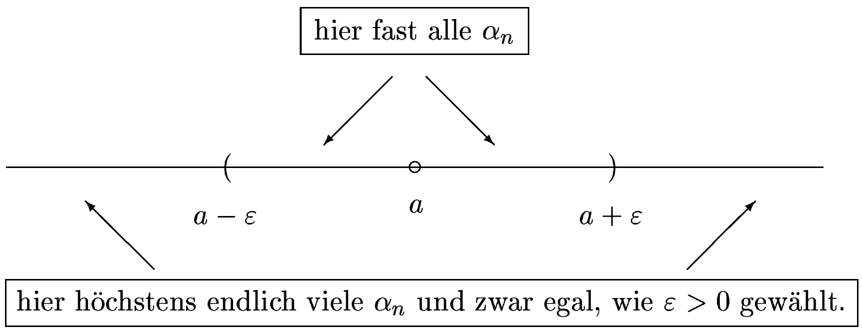
WARNUNG: $Folge \neq \{Folgenglieder\}$.
$\alpha = \mathbb{N} \times \{1\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ aber $\{\alpha_n | n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$.

Definition 1.0.5. *$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reelle Folge, $a \in \mathbb{R}$.*
a Grenzwert von α (α konvergiert gegen a) :$\Leftrightarrow$ Zu jedem $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt es ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass der Abstand $|\alpha_n - a| < \varepsilon$ sofern $n \geq N_\varepsilon$.

Konvergenz bedeutet nicht, dass irgendein Folgeglied α_n mit dem Grenzwert a übereinstimmen muss.
Konvergenz bedeutet, dass in dem offenen Intervall

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

egal wie $\varepsilon > 0$ gewählt ist, fast alle[1] Folgenglieder liegen, außerhalb aber höchstens endlich viele.



Lemma 1.0.6. *Eine reelle Folge $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ hat höchstens einen Grenzwert a. Man schreibt dann*

$$a = \lim\ \alpha_n \textit{ oder } \alpha_n \to a.$$

[HS] $x \in \mathbb{R}$ so dass $|x| \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Dann ist $x = 0$.

Beweis des Lemmas: a, a' Grenzwerte, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N, N' \in \mathbb{N}$ so dass

$$|\alpha_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \; sofern\ n \geq N$$

$$|\alpha_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} \; sofern\ n \geq N'$$

Für $n \geq N + N'$ ist dann

$$|a-a'| = |a - \alpha_n + \alpha_n - a'| \leq |a - \alpha_n| + |\alpha_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h. $a = a'$ nach **[HS]**. □

EX: 23/11/99

[1] Für $\alpha_n := const. = c \in \mathbb{R}$ gilt $\lim \alpha_n = c$.

[2] Für $A \in \mathbb{R}$,$\alpha_n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{A}{n} & n > 0 \end{cases}$, gilt $\lim\ \alpha_n = 0$.

Beweis :

$$|\alpha_n - 0| = \left|\frac{A}{n}\right| \leq \frac{|A|}{n} \text{ für } n \geq 1.$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert nach Archimedes ein $N \in \mathbb{N}_+$ so dass

$$\frac{|A|}{\varepsilon} < N,$$

[1]=alle bis auf endlich viele Ausnahmen

d.h. $n \geq N \geq 1$ impliziert

$$|\alpha_n - 0| \leq \frac{|A|}{n} < \varepsilon,$$

also $\alpha_n \to 0$. $\square$

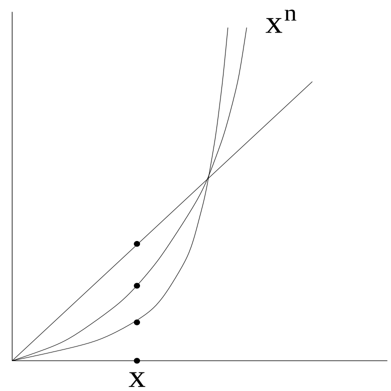
KRITERIUM:

$\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}, c \geq 0$ so dass

$$|\beta_n - b| \leq \frac{c}{n} \text{ für fast alle n.}$$

Dann ist $b = \lim \beta_n$.

[3] Für $|x| < 1, \alpha_n := x^n$ gilt $\lim\ x^n = 0$



Beweis : Œ $x \neq 0$. $|x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} = 1 + h, h > 0$. Nach Bernoulli ist

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n}$$

für $n \geq 1$, also $\lim x^n = 0$ nach dem Kriterium. $\square$

[4] $\alpha_n := 1 + (-1)^n$ konvergiert nicht[2].

Beweis : Angenommen $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert von α_n. Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es dann ein N so dass

$$|\alpha_n - a| < \frac{1}{2} \text{ sofern } n \geq N.$$

Ist $n \geq N,\ n$ gerade, so ist $|\alpha_n - a| = |2 - a| < \frac{1}{2}$, d.h. $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$, ist dagegen $n \geq N,\ n$ ungerade, so ist $|\alpha_n - a| = |0 - a| < \frac{1}{2}$, d.h. $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, ein Widerspruch. $\square$

[5] Für $x > 0,\ \alpha_n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \sqrt[n]{x} & n > 0 \end{cases}$, gilt $\lim \alpha_n = 1$.

Beweis : Sei $x \geq 1 :\ \sqrt[n]{x} = 1 + h_n, h_n \geq 0$ geeignet.

Bernoulli: $x \geq 1 + n \cdot h_n$, d.h. $h_n \leq \frac{x-1}{n}, n \geq 1$. Damit $|\sqrt[n]{x} - 1| = h_n \leq \frac{x-1}{n}$ für $n \geq 1$ also $\lim \sqrt[n]{x} = 1$ nach Kriterium.

Sei $0 < x < 1 :\quad \sqrt[n]{x} = \frac{1}{1+h_n},\quad h_n$geeignet.

Bernoulli: $h_n \leq \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1}{n}$ Damit

$$\left|\sqrt[n]{x} - 1\right| = \left|\frac{1}{1+h_n} - 1\right| = \frac{h_n}{1+h_n} \leq h_n \leq \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1}{n},\ n \geq 1$$

[2]=divergiert

also $\lim \sqrt[n]{x} = 1$ nach Kriterium. □

[6] Für $\alpha_n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \sqrt[n]{n} & n > 0 \end{cases}$, gilt $\lim\ \alpha_n = 1$

Beweis : $\alpha_n = 1 + h_n,\ h_n \geq 0$
Bernoulli-Trick versagt.

$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + \binom{n}{1} h_n + \binom{n}{2} h_n^2 \geq \binom{n}{2} h_n^2$$

d.h.

$$h_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \leq \frac{3}{n} \text{ für } n \geq 3.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Archimedes ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{3}{\varepsilon^2} < N$
Für $n \geq N + 3$ ist dann $|\alpha_n - 1| = h_n \leq \sqrt{\frac{3}{n}} < \varepsilon$, d.h. $\alpha_n \to 1$. □

Satz 1.0.7. *:* $|x| < 1,\ s_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.
Dann ist $\lim\ s_n(x) = \frac{1}{1-x}$.

Beweis :

$$s_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

also

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \leq \frac{1}{|1-x|} \cdot |x^n| \leq \frac{const}{n} \text{ für } n \geq 1 \text{ nach } \textbf{EX}\ [3].$$

□

Bemerkung 1.0.8. *: Die Menge* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *der reellen Folgen*

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

ist auf natürliche Weise eine $\mathbb{R}$*-Algebra mit* $\mathbb{1}$*, d.h. ist* $\mathbb{1}$ *die konstante Folge* $\mathbb{1}_n = 1$, $(\alpha_n), (\beta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{R}$ *so ist*

$$(\alpha_n) \dot{\pm} (\beta_n) := (\alpha_n \dot{\pm} \beta_n)$$

$$\lambda \cdot (\alpha_n) := (\lambda \cdot \alpha_n)$$

$$(\mathbb{1}_n)(\alpha_n) = (\alpha_n)$$

wieder eine reelle Folge. Überdies ist $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *partiell geordnet :*

$$(\alpha_n) \leq (\beta_n) :\Leftrightarrow \alpha_n \leq \beta_n \text{ für alle } n$$

und mit (α_n) *gehört auch die Folge der Beträge*

$$|(\alpha_n)| := (|\alpha_n|)$$

zu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Stabilitätseigenschaften („Die Glorreichen 8“)

(1) (α_n) konvergent $\Rightarrow$ Es gibt ein $C \geq 0$ so dass $|\alpha_n| \leq C$ für alle n.

(2) $\alpha_n \to a,\ \alpha_n = \beta_n$ für fast alle $n \Rightarrow \beta_n \to a$.

(3) $\alpha_n \to a,\ \beta_n \to b, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_n \pm \beta_n \to a \pm b,\ \lambda\alpha_n \to \lambda a$.

(4) $\alpha_n \to a,\ \beta_n \to b, b \neq 0, \beta_n \neq 0$ für alle $n \Rightarrow \frac{\alpha_n}{\beta_n} \to \frac{a}{b}$.

(5) $\alpha_n \to a \Rightarrow |\alpha_n| \to |a|$.

(6) $\alpha_n \to a,\ a \neq 0 \Rightarrow$ Es gibt ein $C > 0$ so dass $|\alpha_n| \geq C$ für fast alle n.

(7) $\alpha_n \to a,\ \beta_n \to b, \alpha_n \leq \beta_n$ für fast alle $n \Rightarrow a \leq b$.

(8) $\alpha_n \leq \gamma_n \leq \beta_n$ für fast alle n, $\alpha_n \to a,\ \beta_n \to a \Rightarrow \gamma_n \to a$.

Beweis der Stabilitätseigenschaften:

(1): $\alpha_n \to a$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $|\alpha_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Für diese n ist dann

$$|\alpha_n| = |\alpha_n - a + a| < 1 + |a|, \text{ also}$$
$$|\alpha_n| \leq C := max\{1 + |a|, |\alpha_0|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_N|\}$$

für alle n.
(2): Zunächst gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$ so dass $\alpha_n = \beta_n$ für alle $n \geq N'$. Da $\alpha_n \to a$ gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein N so dass $|\alpha_n - a| < \varepsilon$ sofern $n \geq N$, also $|\beta_n - a| < \varepsilon$ sofern $n \geq max\{N, N'\}$.
(3): Exemplarisch: $\alpha_n \cdot \beta_n \to a \cdot b$
$|\alpha_n \cdot \beta_n - a \cdot b| = |\alpha_n\beta_n - \beta_n a + \beta_n a - ab| \leq |\beta_n||\alpha_n - a| + |a||\beta_n - b|$.
Nach (1) gibt es ein $C \geq 0$ so dass $|\beta_n| \leq C$ für alle $n \geq 0$, also
$|\alpha_n \cdot \beta_n - a \cdot b| \leq A(|\alpha_n - a| + |\beta_n - b|)$ wobei $max\{C, |a|\} = A$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nun $N, N' \in \mathbb{N}$ so dass

$$|\alpha_n - a| < \frac{\varepsilon}{2A+1}, \quad n \geq N$$
$$|\beta_n - b| < \frac{\varepsilon}{2A+1}, \quad n \geq N'$$

also

$$|\alpha_n \cdot \beta_n - a \cdot b| < \varepsilon \text{ sofern } n \geq max\{N, N'\}.$$

(5): $||\alpha_n| - |a|| \leq |\alpha_n - a|$
(6): Zu $\varepsilon := \frac{1}{2}|a|$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|\alpha_n - a| < \frac{1}{2}|a|$ für alle $n \geq N$, also für $n \geq N$

$$\Big||\alpha_n| - |a|\Big| \leq |\alpha_n - a| < \frac{1}{2}|a|.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$-\frac{1}{2}|a| < |\alpha_n| - |a| < \frac{1}{2}|a|$$

d.h.

$$|\alpha_n| > C := \frac{1}{2}|a| \text{ für alle } n \geq N.$$

(7): Sei $\gamma_n := \beta_n - \alpha_n,\ c := b - a$. Es gilt $\gamma_n \geq 0$ für n $\geq N', \gamma_n \to c$. Angenommen $c < 0$. Dann gibt es zu $\varepsilon := \frac{1}{2}|c|$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass
$|\gamma_n - c| < \frac{1}{2}|c|$ für alle $n \geq N$, also

$$-\frac{1}{2}|c| < \gamma_n - c < \frac{1}{2}|c|$$

und damit

$$\gamma_n < c + \frac{1}{2}|c| = \frac{1}{2}c < 0,$$

ein Widerspruch.
(8): $\alpha_n - a \leq \gamma_n - a \leq \beta_n - a$, insbesondere $-|\alpha_n - a| \leq \gamma_n - a \leq |\beta_n - a|$, also $|\gamma_n - a| \leq max\{|\beta_n - a|, |\alpha_n - a|\} < \varepsilon$ für $n \geq N$ (siehe (2)).
(4): $|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{a}{b}| = \frac{1}{|\beta_n||b|}|\alpha_n \cdot b - a \cdot b + a \cdot b - a \cdot \beta_n| \leq \frac{1}{|\beta_n|}|\alpha_n - a| + \frac{|a|}{|\beta_n||b|}|\beta_n - b|$. Da $b \neq 0$, gibt es ein $C \geq 0,\quad N' \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{1}{|\beta_n|}, \frac{|a|}{|\beta_n||b|} \leq C \text{ für alle } n \geq N'$$

also

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{a}{b}\right| \leq C|\alpha_n - a| + C|\beta_n - b| \text{ für alle } n \geq N'.$$

Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq max\{N, N'\}$$

(vgl.(3)). □

WARNUNG: $\alpha_n \to a, \alpha_n > 0 \overset{i.a.}{\not\Rightarrow} a > 0$ (sondern nur $a \geq 0$).

$$\alpha_n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{1}{n} & n \geq 1 \end{cases}.$$

$\alpha_n > 0$ aber $\lim\ \alpha_n = 0$.

EX:

[1]

$$\alpha_n := \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Weder die Folge im Zähler noch die im Nenner konvergiert, aber für $n \geq 1$ ist

$$\alpha_n = \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \to \frac{0}{1} = 0.$$

[2] $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \vee y := max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$x \wedge y := min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

$\alpha_n \to a, \beta_n \to b \Rightarrow \alpha_n \Diamond \beta_n \to a \Diamond \beta$

Aufgrund der Stabilitätseigenschaften des Konvergenzbegriffes ist die Menge

$$\mathcal{F}_{konv} := \{\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \alpha \textit{ konvergent}\}$$

auf natürliche Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (vgl. VL $\ll$ Lineare Algebra $\gg$) und die Limesbildung $\alpha \mapsto \lim \alpha_n$ eine lineare Abbildung

$$\lim : \mathcal{F}_{konv} \to \mathbb{R}$$

Der „kern“ dieser Abbildung

$$kern(\lim) := \{\alpha \in \mathcal{F}_{konv} \mid \lim \ \alpha_n = 0\}$$

ist gerade der Untervektorraum der NULLFOLGEN.

Definition 1.0.9.

$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

(1) α *beschränkt* $:\Leftrightarrow \{\alpha_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ *beschränkt, d.h. es existiert ein* $c \geq 0$ *so dass* $|\alpha_n| \ \leq c$ *für alle* n.

(2) α *monoton steigend (fallend)* $:\Leftrightarrow \alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ *für fast alle* n
($\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ *für fast alle* n*)*

Monoton steigende Folgen werden mit $\alpha \nearrow$, monoton fallende Folgen mit $\alpha \searrow$ bezeichnet. 24/11/99

Theorem 1.0.10. $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *monoton und beschränkt. Dann hat* α *einen Grenzwert und es gilt:*

$$\lim \alpha_n := \begin{cases} \sup \alpha_n & \alpha \nearrow \\ \inf \alpha_n & \alpha \searrow \end{cases}.$$

EX:

[1] Eulersche Zahl $e = 2,718281...$

$$e_n := \begin{cases} 2 & n = 0 \\ (1 + \frac{1}{n})^n & n \geq 1 \end{cases}$$

$$e'_n := \begin{cases} 4 & n = 0 \\ (1 + \frac{1}{n})^{n+1} & n \geq 1 \end{cases}$$

klar: $2 \leq e_n \leq e'_n \leq 4$ für alle n.

$$\begin{aligned} e_n \nearrow: \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{(n+1)^3} \\ &> 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_n \searrow: \frac{e'_{n-1}}{e'_n} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n^2-1)}\right)^n \\ &> \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

also

$$2 = e_0 \le e_1 < e_2 < ... < e_n < e'_n < e'_{n-1} ... < e'_1 = e'_0 = 4$$
$$2 \le \lim\ e_n = \sup\ e_n \le 4$$
$$2 \le \lim\ e'_n = \inf\ e'_n \le 4$$
$$e'_n = e_n + \frac{e_n}{n} \Rightarrow 2 \le e := \lim\ e_n = \lim\ e'_n \le 4.$$

[2] Natürlicher Logarithmus,
$x > 0$
$\lambda_n(x) := \begin{cases} x-1 & n=0 \\ n\,(\sqrt[n]{x}-1) & n>0 \end{cases}$

(1) $\lambda_n\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\sqrt[n]{x}} \cdot \lambda_n(x),\ n > 0$

(2) $\lambda_n(x \cdot y) = \lambda_n(x) + \lambda_n(y) + \frac{1}{n}\lambda_n(x) \cdot \lambda_n(y)$

(3) $\lambda_n(x) < \lambda_n(y)\ falls\ x < y$

(4) $\lambda_n(1) = 0$

Ⓢ Die reelle Folge $(\lambda_n(x))$ konvergiert für jedes $x > 0$.

$\log:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log\ x := \lim\ \lambda_n(x)$ ist der sogenannte natürliche Logarithmus.

Beweis : Da $\sqrt[n]{x} \to 1$, Œ $x > 1$.
Für diese x ist $\lambda_n(x) \ge 0$.

$$\begin{aligned} \lambda_n - \lambda_{n-1} &= n(y^{n+1}-1) - (n+1)(y^n-1),\ x = y^{n(n+1)},\ y > 1. \\ &= n \cdot y^n \cdot (y-1) - (y^n - 1) \\ &= n \cdot y^n \cdot (y-1) - (y-1)(y^{n-1} + y^{n-2} + .. + 1) \\ &= (y-1)\left[(y^n - y^{n-1}) + (y^n - y^{n-2}) + .. + (y^n - 1)\right] > 0. \end{aligned}$$

Damit ist $\lambda_n \ge \lambda_{n+1} \ge 0$, also existiert

$$\lim \lambda_n(x) = \inf \lambda_n(x)$$

□

Theorem 1.0.11. *Der natürliche Logarithmus*

$$\log: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lim \lambda_n(x),$$

hat folgende Eigenschaften:

L1 $\log\ x \cdot y = \log\ x + \log\ y$

L2 $\log\ x < \log\ y$ *für* $x < y$

L3 $\log\ e = 1, \quad \log\ 1 = 0$

L4 $1 - \frac{1}{x} \leq \log\ x \leq x - 1$

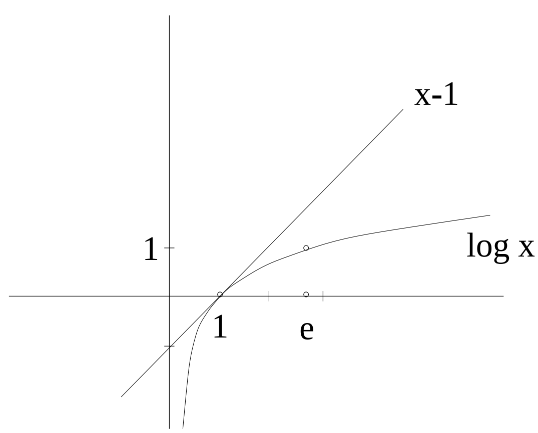
Folgerung 1.0.12.
$\log\ \frac{1}{x} = -\log\ x$
$\log\ x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \log\ x$ *für alle* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
$x \mapsto \log\ x$ *injektiv.*

Folgerung 1.0.13. $\log : (\mathbb{R}_x, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ *Homomorphismus von abelschen Gruppen.*

Später: log ist sogar ein Isomorphismus.

Beweis des Theorems:

L1: $\lambda_n(x \cdot y) = \lambda_n(x) + \lambda_n(y) + \frac{1}{n}\lambda_n(x) \cdot \lambda_n(y)$
L2: $x < y \Rightarrow y = A \cdot x,\ A > 1,\ \log\ A > 0.$
L3: $e_n \leq e \leq e'_n \Rightarrow$
$\frac{n}{n+1} \leq n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \log\ e \leq (n+1) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{n+1}{n}$
L4: $\frac{\lambda_n}{n} = \sqrt[n]{x} - 1 > -1 \Rightarrow x \geq 1 + \lambda_n$
$\log\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \log\ x \geq 1 - \frac{1}{x}.$ □



Definition 1.0.14. $\alpha, \alpha' : \mathbb{N} \to X$ *Folgen.*
α' *Teilfolge von* α :⇔ *Es gibt eine streng monoton steigende Folge* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *natürlicher Zahlen, so dass*

$$\alpha' = \alpha \circ \varphi,$$

mit anderen Worten $\alpha'_n = \alpha_{\varphi(n)}$.
Ist $\varphi \neq id$ *so heißt* α' *eine echte Teilfolge von* α.

Satz 1.0.15. $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *reelle Folge*

äq

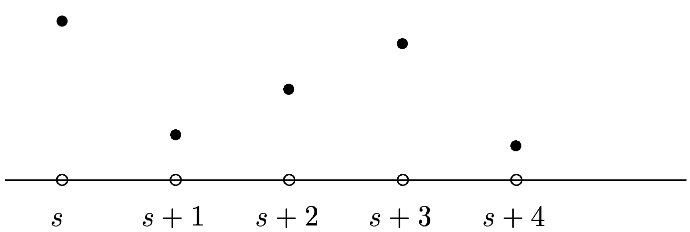
(i) α *konvergent*

(ii) Jede echte Teilfolge von α *ist konvergent und sämtliche Grenzwerte dieser Teilfolgen stimmen überein.*

Theorem 1.0.16. *(Satz von Bolzano*[3]*-Weierstraß*[4]*)*
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

[HS] Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweis des HS: 30/11/99
$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, s \in \mathbb{N}$.
s Spitze von $\alpha :\Leftrightarrow \alpha_n \leq \alpha_s$ für alle $n \geq s$.
$S := \{s \in \mathbb{N} \mid s \text{ Spitze von } \alpha\}$.



Ist S unendlich, so gibt es Spitzen

$$\begin{array}{rl} & s_0 < s_1 < s_2 < s_3 < .. < s_k < .. \\ \text{also} & \alpha_{s_0} \geq \alpha_{s_1} \geq \alpha_{s_2} \geq \alpha_{s_3} \geq .. \,. \end{array}$$

und $(\alpha_{s_k})_{k\geq 0}$ ist eine monoton fallende Teilfolge von (α_n).
Ist S dagegen endlich, definiere

$$n_0 := \begin{cases} 0 & S = \emptyset \\ \max S + 1 & S \neq \emptyset \end{cases}$$

Dann gibt es ein $n_1 \geq n_0$ so dass $\alpha_{n_1} > \alpha_{n_0}$, insbesondere $n_1 > n_0$.
n_1 ist ebenfalls keine Spitze, daher gibt es ein $n_2 \geq n_1$ so dass $\alpha_{n_2} > \alpha_{n_1}$, insbesondere $n_2 > n_1$. Nach Induktion existieren $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < .. < n_k < ..$
so dass

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_1} < \alpha_{n_2} < ..$$

d.h. $(\alpha_{n_k})_{k\geq 0}$ ist eine (streng) monoton steigende Teilfolge von (α_n). □

Definition 1.0.17. $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *reelle Folge.*
α *Cauchy*[5]*-Folge* $:\Leftrightarrow$ *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$ *so dass*

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$.

[3]Bernhard Bolzano (1781-1848), ital. Mathematiker
[4]Karl Weierstraß (1815-1897), deutscher Mathematiker
[5]Auguste Cauchy (1789-1857), franz. Mathematiker

Lemma 1.0.18.

(1) Jede CF ist beschränkt.

(2) Jede konvergente Folge ist eine CF.

WARNUNG:

Selbst wenn der Abstand zweier aufeinander folgender Folgenglieder beliebig klein wird, ist die Folge im allgemeinen keine Cauchy-Folge:
$s_0 := 0, s_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{n}, n \geq 1.$
$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1}$
$n \leq 2^k < 2^{k+1} \leq m$
$s_m - s_n \geq \frac{1}{2^k+1} + .. + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{2^{k+1}-2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$

Theorem 1.0.19. $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *reelle Folge*

äq

(i) α *konvergent*

(ii) α *Cauchy-Folge.*

Beweis : $(i) \to (ii)$: 1.0.18
$(ii) \to (i)$: Nach 1.0.19 ist (α_n) beschränkt und besitzt deshalb eine konvergente Teilfolge $\alpha_{n_k} \to \overline{\alpha}$.

$$|\alpha_n - \overline{\alpha}| \leq |\alpha_n - \alpha_{n_k}| + |\alpha_{n_k} - \overline{\alpha}|.$$

Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \geq 0$ sodass

$$|\alpha_{n_k} - \overline{\alpha}| < \frac{\epsilon}{2},\ k \geq N$$

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \frac{\epsilon}{2},\ n, m \geq N$$

Für $k \geq N$ ist $n_k \geq N$, also

$$|\alpha_n - \overline{\alpha}| < \epsilon \text{ für } n \geq N.$$

□

Bemerkung 1.0.20. *Eine rationale Cauchy-Folge* $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *hat i.a. keinen Grenzwert in* $\mathbb{Q}$:

$$\frac{1}{n}\left[n \cdot \sqrt{2}\right] \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

EX:

[1] Goldene Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
$x_0 := 1, x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, n \geq 0$
Induktion:

(1) $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 2$ für $x \geq 1$.

(2) $|x_{n+k} - x_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |x_n - x_0| \leq 4 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$

(x_n) ist damit CF, $x := \lim x_n,\ x = 1 + \frac{1}{x}$ oder $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
Da $x_n \geq \frac{3}{2}$ ist auch $x \geq \frac{3}{2}$, d.h. $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

[2] Allgemeine Potenz
$a > 0,\ 0 \neq q \in \mathbb{Z},\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$a^{\frac{1}{q}} := \begin{cases} \sqrt[q]{a} & q > 0 \\ \frac{1}{\sqrt[q]{a}} & q < 0 \end{cases}$$

$a^{\frac{p}{q}} := (a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$.

Eigenschaften: $r,\ s \in \mathbb{Q},\ a, b > 0$

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

(2) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

(3) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

(4) Für $r < s$ ist
$a^r < a^s$ falls $a > 1$
$a^r > a^s$ falls $a < 1$

(5) Für $1 < a$ ist $|a^r - a^s| \leq a^{max\{r,s\}} \left(a^{|r-s|} - 1\right)$.

[HS] Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es rationale Folgen $x_n \nearrow x$ und $x'_n \searrow x$.

Beweis : $\frac{1}{n}[nx] \leq x < \frac{1}{n}[nx] + \frac{1}{n}$. □

Die beiden äußeren Folgen besitzen monotone Teilfolgen, die notwendigerweise monoton steigend bzw. monoton fallend gegen x konvergieren.

Ⓢ $a > 0,\ x \in \mathbb{R},\ x_n,\ x'_n \in \mathbb{Q}$ so dass

$$x_n \to x,\ x'_n \to x.$$

Dann sind (a^{x_n}) und $(a^{x'_n})$ Cauchy-Folgen und ihre Grenzwerte stimmen überein:

$$\lim\ a^{x_n} = \lim a^{x'_n}.$$

$$\text{Zusatz: } \lim\ a^{x_n} > 0.$$

Beweis : Œ $a > 1$. Dann existiert ein $M \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n|,\ |x'_n| \leq M$ für alle n, insbesondere

$$\left|a^{x_n} - a^{x'_m}\right| \leq a^M \left(a^{|x_n - x'_m|} - 1\right),\ n \in \mathbb{N}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $p \in \mathbb{N}_+$ so dass $|a^{\frac{1}{p}} - 1| = \sqrt[p]{a} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^M}$.
Da $x_n \to x, x'_m \to x$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - x'_m| < \frac{1}{p}$ für alle $n, m \geq N$, d.h.

$|a^{x_n} - a^{x'_m}| < \varepsilon, \quad n,\ m \geq N$. Für $x_m = x'_m$ folgt, dass sowohl (a^{x_n}) als auch $(a^{x'_m})$ CF sind. $y := \lim a^{x_n}, y' := \lim a^{x'_m}$ existiert.

$$|y - y'| \leq |y - a^{x_n}| + |a^{x_n} - a^{x'_m}| + |a^{x'_m} - y| < 3 \cdot \varepsilon$$

$$\text{für } n, m \geq N_* \geq N \text{ geeignet, d.h. } y = y'.$$

Zusatz: $x \geq 0$. $x_n \geq x, x_n \to x, x_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{x_n} \geq 1$, also auch $\lim \ a^{x_n} \geq 1$.
$x < 0$. $y_n \leq x,\ y_n \to x,\ y_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{-y_n} \geq 1$, also $\lim \ a^{-y_n} \geq 1$ d.h. $\lim \ a^{y_n} = \frac{1}{\lim \ a^{-y_n}} > 0$.
□

Definition 1.0.21. *: $a > 0, x \in \mathbb{R}$.*

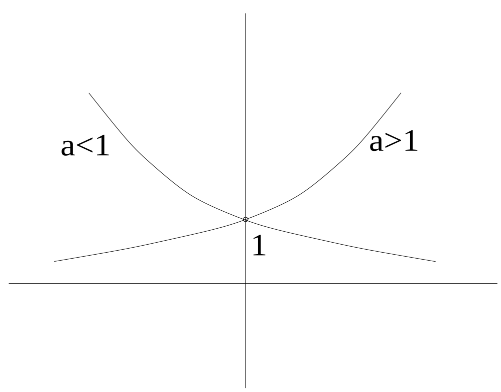
$$a^x := \lim \quad a^{x_n},\ x_n \to x,\ x_n \in \mathbb{Q}.$$

Ⓢ Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto a^x$ hat folgende Eigenschaften:

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(2) $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$

(3) $a^x < a^y$ falls $x < y, 1 < a$
$a^x > a^y$ falls $x < y, 1 > a$.



Beweis :(1)-(2) Stabilität des Limes.
$a > 1 : y = x + h,\ h > 0$. Wähle $m \in \mathbb{N}_+, h_n \in \mathbb{Q}$ so dass $\frac{1}{m} \leq h_n < h,\ h_n \to h$. Dann ist $1 < \sqrt[m]{a} \leq a^{h_n}$, also $\lim a^{h_n} = a^h > 1$ und damit $a^y = a^x \cdot a^h > a^x$.
□

Folgerung:

(1) $\log(e^x) = x, e^{\log y} = y$

(2) $a^x = e^{x \log a}$

(3) $(\mathbb{R}_+, \cdot) \overset{\log}{\to} (\mathbb{R}, +)$ Isomorphismus abelscher Gruppen.

Beweis : $x_n \le x \le x'_n, \quad x_n,\ x'_n \in \mathbb{Q}, \quad x_n,\ x'_n \to x$. Dann ist für $a > 1$

$$a^{x_n} \le a^x \le a^{x'_n}$$

und damit

$$x_n \log a \le \log a^x \le x'_n \log a,$$

d.h. $x \cdot \log a = \log a^x$. Für $a = e$ folgt $x = \log e^x$. Da log injektiv, folgt aus $\log e^{\log y} = \log y, \quad y = e^{\log y}$. □

Theorem 1.0.22. *Es gibt genau eine Abbildung* $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *mit*

L1 $\lambda(x \cdot y) = \lambda(x) + \lambda(y)$

L2 $\lambda(x) < \lambda(y)$ *für* $x < y$

L3 $\lambda(e) = 1$

nämlich $\lambda = \log$.

[HS] $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

(1) $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$

(2) $\psi(x) \le \psi(y)$ für $x \le y$

Dann ist $\psi(x) = \psi(1) \cdot x, \psi(1) \ge 0$.

Beweis des Hilfssatzes: Nach (1) ist $\psi(2) = \psi(1) + \psi(1)$. Mit (2) folgt
$0 \le \psi(2) - \psi(1) = \psi(1) =: A$ und $\psi(2) = 2 \cdot A$.
Mit Induktion folgt $\psi(n) = n \cdot A$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$.

$$\begin{aligned}
& \psi(0) = \psi(0+0) \overset{(1)}{=} \psi(0) + \psi(0) \\
\Rightarrow \quad & \psi(0) = 0 \\
\Rightarrow \quad & 0 = \psi(0) = \psi(n + (-n)) = \psi(n) + \psi(-n) \\
\Rightarrow \quad & \psi(-n) = -\psi(n) = -n \cdot A,\ n \in \mathbb{N}_+,
\end{aligned}$$

insgesamt $\psi(q) = q \cdot A$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad & \Rightarrow \quad p = q \cdot \frac{p}{q} = \sum_{n=1}^{q} \frac{p}{q} \\
& \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \psi(p) = \sum_{n=1}^{q} \psi\left(\frac{p}{q}\right) = q \cdot \psi\left(\frac{p}{q}\right) \\
& \Rightarrow \quad \psi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\psi(p)}{q} = \frac{p \cdot A}{q},
\end{aligned}$$

d.h. $\psi(x) = x \cdot A,\ x \in \mathbb{Q}$.
$x_n, x'_n \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R}$ s.d. $x_n \nearrow x, x'_n \searrow x$
$A \cdot x_n = \psi(x_n) \leq \psi(x) \leq \psi(x'_n) = A \cdot x'_n$, also $\psi(x) = \lim\ \ A \cdot x_n = \psi(1) \cdot x$. □

Beweis des Theorems:

(1) $x \mapsto \psi(x) := \lambda(e^x)$ genügt dem [HS] mit $\psi(1) = 1$, d.h. $\lambda(e^x) = x$, insbesondere

$$\lambda\left(e^{\lambda(x)}\right) = \lambda(x),$$

d.h. $e^{\lambda(x)} = x$, da λ injektiv. Beachte: $e^x > 0$ für alle x und daher ist $\lambda(e^x)$ definiert.
(2) Sowohl λ als auch log sind Umkehrabbildungen zu $x \mapsto e^x$, also $\lambda = \log$. □

Definition 1.0.23. *: $(a_n), (s_n)$ reelle Folgen*

(1) $((a_n),\ (s_n))$ unendliche Reihe mit n-tem Reihenglied a_n und n-ter Partialsumme s_n :⇔ $s_n = a_0 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ für alle n.

(2) $((a_n),\ (s_n))$ konvergiert: ⇔ (s_n) konvergiert.

Üblicherweise wird sowohl die Reihe $((a_n),\ (s_n))$ als auch deren möglicher Grenzwert mit 3/12/99

$$\sum_{k \geq 0} a_k$$

bezeichnet, da die Folge der Partialsummen (s_n) die Reihe festlegt:
$a_n = s_n - s_{n-1}$.

EX:

[1] $|x| < 1$
Die geometrische Reihe

$$\sum_{n \geq 0} x^n$$

hat den Grenzwert

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

[2] Die harmonische Reihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

divergiert:

$$\begin{aligned} s_{2k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2}k\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \ldots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}\ . \end{aligned}$$

[3] Die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergiert gegen 1 („Teleskopsumme“):

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

[4] Die Zeta-Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$.

$$2^n - 1 = (1+1)^n - 1 \geq 1 + n - 1 \geq n$$

also

$$\zeta_n(s) \leq \zeta_{2^n-1}(s) = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{(n-1)s}} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^s}\right)$$
$$\leq \sum_{k\geq 0} 2^{(1-s)k} = \frac{1}{1 - 2^{(1-s)}}$$

Bemerkung:

(1) $k \in \mathbb{N}_+,\ \zeta(2k) = \pi^{2k} \cdot r_k, r_k \in \mathbb{Q}, z.B. \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

(2) $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$; ob $\zeta(5)$ rational oder irrational ist, ist unbekannt.

(3) Die ζ-Funktion ist wesentlich beim Beweis des Primzahlsatzes:

$$\#\{p \in \mathbb{N} \mid p \ \ prim\} \approx \frac{x}{\log x}.$$

Satz 1.0.24.

äq

(i) $\sum_{k\geq 0} a_k$ *konvergent*

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$ *so dass* $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ *für alle* $n,\ m \geq N,\ m \geq n.$

Folgerung 1.0.25.

$$\sum_{k\geq 0} a_k \ \textit{konvergent} \Rightarrow (a_n) \ \textit{Nullfolge.}$$

Ist (a_n) *eine Nullfolge, so braucht* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *nicht notwendig zu konvergieren.*

Satz 1.0.26 (Leibniz[6]).

$$a_n \searrow 0, a_n \geq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n \textit{ konvergiert.}$$

Beweis : Sei $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Aus $a_k \geq a_{k+1}$ für alle k folgt

$$s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+1}a_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0,$$

also $(s_{2n}) \searrow$, analog $s_{2n+3} - s_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$, also $(s_{2n+1}) \nearrow$ außerdem $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n}$, also für alle n gilt

$$s_1 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_{2n+1} \ldots \leq s_{2n} \leq s_{2n-2} \leq \ldots \leq s_2 \leq s_0.$$

Da (s_{2n+1}) monoton wachsend und nach oben beschränkt (z.B. durch s_0) und (s_{2n}) monoton fallend und nach unten beschränkt (durch s_1), existieren $s = \lim s_{2n+1}$ und $s' = \lim s_{2n}$. Andererseits folgt mit STAB
$s = \lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} - \lim a_{2n+1} = s' - 0 = s$. Insgesamt folgt $s = \lim s_n$. □

EX:

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n} \text{ konvergiert.}$$

Definition 1.0.27.

$$\sum_{n\geq 0} a_n \textit{ konvergiert absolut } :\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} |a_n| \textit{ konvergiert.}$$

Lemma 1.0.28.

$$\sum_{n\geq 0} a_n \textit{ konvergiert absolut} \stackrel{\stackrel{i.a.}{\not\Leftarrow}}{\Rightarrow} \sum_{n\geq 0} a_n \textit{ konvergiert.}$$

Kriterium 1.0.29.

äq

(i) $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *konvergiert absolut*

(ii) Es existiert ein $c \geq 0$ *so dass* $\sum\limits_{n\in E} |a_n| \leq c$ *für jede nicht-leere endliche Menge* $E \subset \mathbb{N}$.

Beweis :

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|,\ A_n \nearrow .$$

Daher konvergiert (A_n) genau dann, wenn es ein $c \geq 0$ gibt mit $A_n \leq c$. □

[6]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), deutscher Universalgelehrter

Folgerung 1.0.30 (Allgem. Kommutativgesetz).
$\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *absolut konvergent,* $\pi \in Aut(\mathbb{N})$*. Dann konvergiert auch die „umgeordnete“ Reihe*

$$\sum_{n\geq 0} a_{\pi(n)}$$

absolut und die Grenzwerte

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ und } \sum_{n\geq 0} a_{\pi(n)}$$

stimmen überein.

Beweis : Ist $\emptyset \neq E \subset \mathbb{N}$ endlich, so ist

$$\sum_{n\in E} |a_{\pi(n)}| = \sum_{m\in\pi(E)} |a_m| \leq c.$$

$$s := \lim \sum_{k=0}^{n} a_k,\ \ s' := \lim \sum_{k=0}^{n} a_{\pi(k)},\ \ \varepsilon > 0.$$

Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq N$

$$\left| s - \sum_{k=0}^{n} a_{\pi(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| s' - \sum_{k=0}^{n} a_{\pi(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\sum_{k\geq n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Da $\pi \in Aut(\mathbb{N})$ gibt es ein $M \geq N$ so dass $\{0, 1, \dots N\} \subset \{\pi(0), \dots, \pi(M)\}$. Daher ist

$$\begin{aligned} |s - s'| &\leq \left| s - \sum_{k=0}^{N} a_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{M} a_{\pi(k)} \right| + \left| \sum_{k=0}^{M} a_{\pi(k)} - s' \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{\pi(k)>N} |a_{\pi(k)}| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.0.31. *(ohne Beweis)*
Konvergiert

$$\sum_{n\geq 0} a_n$$

bedingt, d.h. konvergiert aber konvergiert nicht absolut, so gibt es zu jeder reellen Zahl $A \in \mathbb{R}$ *ein* $\pi \in Aut(\mathbb{N})$ *so dass*

$$A = \sum_{n\geq 0} a_{\pi(n)}.$$

Bemerkung 1.0.32 (Konvergenzkriterien).

(1) *Majorantenkriterium* 7/12/99

$$\sum_{n\geq 0} c_n \textit{ konvergent, } c_n \geq 0 \textit{ für fast alle } n,\ |a_n| \leq c_n \textit{ für fast alle } n.$$

$$\textit{Dann konvergiert } \sum_{n\geq 0} a_n \textit{ absolut.}$$

(2) *Quotientenkriterium*
$0 \leq \triangle < 1$, (a_n) *so dass*

- (i) $a_n \neq 0$ *für fast alle* n
- (ii) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \triangle$ *für fast alle* n.

$$\textit{Dann konvergiert } \sum_{n\geq 0} a_n \textit{ absolut.}$$

(3) *Wurzelkriterium*
$0 \leq \triangle < 1$, (a_n) *so dass* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \triangle$ *für fast alle* n.

$$\textit{Dann konvergiert } \sum_{n\geq 0} a_n \textit{ absolut.}$$

EX

[1]

$$\sum_{n\geq 1} \frac{log(\sqrt{n}+1)}{n^2} \text{ konvergiert (absolut), da}$$

$$\left|\frac{log(\sqrt{n}+1)}{n^2}\right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \xi\left(\frac{3}{2}\right) \text{ konvergiert.}$$

[2]

$$\sum_{k\geq 0} \frac{k^2}{2^k} \text{ konvergiert (absolut) nach QK;}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} =: \triangle < 1 \text{ für } k \geq 3.$$

[3]

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \text{ konvergiert (absolut) nach WK;}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n}{1+n}\right)^n \leq \frac{1}{2} \text{ nach Bernoulli.}$$

Warnung:

[1] Weder aus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle n noch aus $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ für alle n folgt die Konvergenz von $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ divergiert.}$$

[2] Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|$, $a_n \neq 0$, folgt weder die Existenz eines $0 \leq \triangle < 1$ so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \triangle$ für fast alle n noch die Existenz eines $0 \leq \triangle < 1$ so das $\sqrt{|a_n|} \leq \triangle$ für fast alle n:

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert, aber}$$

$$\sup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sup \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1,\ \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \sup \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1.$$

[3] Aus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n folgt stets Divergenz, ebeso aus $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für fast alle n, denn dann kann (a_n) keine Nullfolge sein.

1.1 Potenzreihen

Lemma 1.1.0 (Lemma von Abel). *(a_n) reelle Folge, $b > 0$ so dass $(a_n b^n)$ beschränkt, $0 \leq r < b$. Dann konvergiert die Potenzreihe*

$$A(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

absolut für alle $|x| \leq r$.

Beweis : Ist $|a_n b^n| \leq C$ für alle n, so ist

$$C \cdot \sum_{n\geq 0} \left(\frac{r}{b}\right)^n$$

konvergente Majorante für $|x| \leq r$. □

EX:

$$\sum_{n\geq 0} nx^n \text{ konvergiert absolut für } |x| < 1.$$

Für $0 < b < 1$ ist $b = \frac{1}{1+\delta}$, $\delta > 0$, also $nb^n = \frac{n}{(1+\delta)^n} \leq \frac{n}{1+n\delta} < \frac{1}{\delta}$.

Bekanntlich gibt es zu jeder Menge X eine Menge Y, so dass $Y \notin X$. Deshalb gibt es Mengen $+\infty$ und $-\infty$[7], so dass
$\pm\infty \notin \mathbb{R}, +\infty \neq -\infty$. Durch

$$-\infty < x < +\infty, \ x \in \mathbb{R}$$

wird die Ordnung von $\mathbb{R}$ auf $^\natural\mathbb{R} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fortgesetzt. Für eine Potenzreihe $A(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ sei

$$K_A := \{b \geq 0 \mid (a_n b^n) \text{ beschränkt}\}$$

und

$$R_A := \begin{cases} +\infty & K_A \text{ unbeschränkt} \\ \sup K_A & K_A \text{ beschränkt} \end{cases}$$

R_A ist der sogenannte Konvergenzradius in A.

Satz 1.1.1.

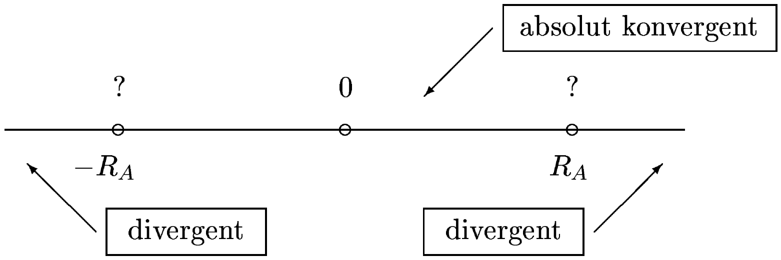
(1)

$$\sum_{n\geq o} a_n x^n \text{ konvergiert absolut für } |x| < R_A$$

(2)

$$\sum_{n\geq o} a_n x^n \text{ divergiert für } |x| > R_A$$

[7] plus bzw. minus unendlich



EX:

[1]

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \text{ hat den Konvergenzradius 1.}$$

$$|x| < 1 : \sum_{n\geq 1} \left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \sum_{n\geq 0} |x|^n \text{ konvergente Majorante, d.h. } R_A \geq 1.$$

$$x = 1 : \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ divergiert, d.h. } R_A \leq 1.$$

$$x = -1 : \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ konvergent.}$$

Folgerung: Auf dem Rand $|x| = R_A$ des „Konvergenzkreises“ K_A kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen.

[2]

$$\sum_{n\geq 0} n!x^n \text{ hat den Konvergenzradius 0.}$$

Wäre nämlich $R_A > 0$ so existiert $0 < b,\ c$ so dass $n!b^n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ also für $n >> 0$:

$$\frac{n}{e} < \frac{n}{e} \cdot \sqrt[n]{e} < \sqrt[n]{n!} \leq \frac{1}{b} \cdot \sqrt[n]{c} \leq \frac{2}{b},$$

ein Widerspruch.

Die Partialsummen $A_n(x)$ einer Potenzreihe 8/12/99

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

sind Polynome vom Grade $\leq\ n$,

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Ist

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

ein Polynom und $\#NST(p) > n$ so verschwinden alle Koeffizienten $p_k = 0$. Bei Potenzreihen verhält es sich genau so.

Satz 1.1.2 (Identitässatz). *$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ Potenzreihe mit $R_A > 0$, $0 < r < R_A$ so dass $A(x) = 0$ für $|x| \leq r$. Dann ist $a_n = 0$ für alle n.*

Folgerung 1.1.3.

äq

(i) $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} b_n x^n, \ |x| \leq r$

(ii) $a_n = b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis : Angenommen $\{n \mid a_n \neq 0\} \neq \emptyset$. Dann existiert
$m := \min\{n \mid a_n \neq 0\}$,

$$A(x) = x^m \cdot \sum_{k\geq 0} a_{m+k} x^k,$$

insbesondere

$$\sum_{k\geq 0} a_{m+k} x^k = 0 \text{ für } 0 < |x| \leq r,$$

also

$$0 = \left| \sum_{k\geq 0} a_{m+k} x^k \right| \geq \left| |a_m| - \left| \sum_{k\geq 0} a_{m+k} x^k \right| \right|$$

und damit für $o < |x| \leq r$

$$|a_m| = \left| \sum_{k\geq 1} a_{m+k} x^k \right| = |x| \left| \sum_{k\geq 1} a_{m+k} x^{k-1} \right| \leq |x| \cdot const,$$

folglich $a_m = 0$. □

Satz 1.1.4.

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, \ B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n.$$

Dann hat die Potenzreihe

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n, \ c_n := \sum_{k=o}^{n} a_k b_{n-k}$$

den Konvergenzradius $R_C \geq \min\{R_A, \ R_B\}$ und es gilt für alle
$|x| < \ min\{R_A, \ R_B\}$

$$C(x) = A(x) \cdot B(x).$$

EX:

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} x^n, \ B(x) = 1 - x, \ C(x) = 1$$

$$R_C = +\infty > \min\{R_A, \ R_B\} = 1.$$

[HS] $\sum\limits_{n\geq 0} u_n,\ \sum\limits_{n\geq 0} v_n$ absolut konvergent,
$w_n := \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
Dann ist auch $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ absolut konvergent und es ist

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right) \textbf{ (Allgemeines Distributivgesetz)}.$$

Beweis : Es existiert ein $c \geq 0$ so dass

$$\sum_{n\geq 0} |u_n|,\ \sum_{n\geq 0} |v_n| \leq c.$$

Dann ist für $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{m} |w_k| = \sum_{i+j\leq m} |u_i||v_j| \leq \left(\sum_{i\leq m} |u_i|\right)\left(\sum_{j\leq m} |v_j|\right) \leq c^2,$$

d.h. $\sum\limits_{n\geq 0} w_k$ konvergiert absolut.
Sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} u_k,\ t_n := \sum\limits_{k=0}^{n} v_k,\ t = \lim s_n,\ s = \lim t_n$.
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\sum_{k\geq N} |u_k|,\ \sum_{k\geq N} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2\cdot c + 1}.$$

Für $m > 2N$ ist dann

$$\begin{aligned}
\left| s_m t_m - \sum_{k=0}^{m} w_k \right| &= \left| \sum_{i,j\leq m} u_i v_j - \sum_{i+j\leq m} u_i v_j \right| \\
&\leq \sum_{\substack{i,j\leq m \\ i+j>m}} |u_i||v_j| \\
&\leq \sum_{\substack{i\leq m \\ j>N}} |u_i||v_j| + \sum_{\substack{j\leq m \\ i>N}} |u_i||v_j| \\
&\leq c\cdot \sum_{j>N} |v_j| + c\cdot \sum_{i>N} |u_i|.
\end{aligned}$$

In der Grenze ist damit

$$\left| s\cdot t - \sum_{k\geq 0} w_k \right| \leq \frac{c\varepsilon}{2c+1} < \varepsilon,$$

d.h.

$$s\cdot t = \sum_{k\geq 0} w_k.$$

□

Bemerkung 1.1.5 (Ergänzung (nicht Teil der Vorlesung)).

$(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkte Folge reeller Zahlen

$$\overline{a_n} := \sup\{a_k | k \geq n\} = \sup_{k\geq n} a_k$$

$$\underline{a_n} := \inf\{a_k | k \geq n\} = \inf_{k\geq n} a_k.$$

Offenbar gilt

(1) $\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}$

(2) $\underline{a_n} \nearrow, \overline{a_n} \searrow$.

Da (a_n) beschränkt ist, existieren die Limiten $\lim \underline{a_n}$ bzw. $\lim \overline{a_n}$ und es gilt

$$\overline{\lim} a_n := \lim \overline{a_n} = \inf_n \sup_{k\geq n} a_k \text{ (limes superior)}$$

$$\underline{\lim} a_n := \lim \underline{a_n} = \sup_n \inf_{k\geq n} a_k \text{ (limes inferior)}$$

Ⓢ$(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkte Folge reeller Zahlen

äq

(i) (a_n) konvergent

(ii) $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$.

Folgerung 1.1.6. *Konvergiert* (a_n) *so ist* $\lim a_n = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$.

Beweis : $(ii) \Rightarrow (i)$: $\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n$.
$(i) \Rightarrow (ii)$: $\underline{\lim} a_n \leq \lim a_n \leq \overline{\lim} a_n$. $a := \lim a_n$, $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \geq 0$ so dass $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also
$a - \varepsilon \leq \underline{a}_n \leq \overline{a}_n \leq a + \varepsilon$ für alle $n \geq N$ für alle $n \geq N$. Damit ist
$a - \varepsilon \leq \underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \leq a + \varepsilon$, d.h. $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = \lim a_n$. □

Theorem 1.1.7 (Hadamard). $\Delta(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *so dass* $(\sqrt[n]{|a_n|})$ *beschränkt. Dann ist*

$$R_A = \begin{cases} \infty & \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} & \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0. \end{cases}$$

EX: $A(x) = \sum_{n\geq 0} (1 + (-1)^n) n \cdot x^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & n \equiv 1(2) \\ \sqrt[n]{2n} & n \equiv 0(2) \end{cases}$$

$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, d.h. $R_A = 1$.

Beweis : Da $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt, ist $R_A > 0$. Zu $0 < t < R_A$ gibt es dann ein $c > 0$ so dass $|a_n t^n| \leq c$, d.h. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\sqrt[n]{c}}{t}$ und damit $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{t}$. Ist $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$, so ist $\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} \geq t$, d.h. $\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} \geq R_A$, insbesondere $R_A \neq \infty$. Ist $0 < t < \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$, so ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{t}$$

für alle $n \geq N$, N geeignet und damit $(a_n t^n)$ beschränkt, d.h.
$R_A \geq \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Ist $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und $1 > \varepsilon > 0$ so ist $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$, N geeignet, d.h. $(a_n \varepsilon^{-n})$ beschränkt und damit $R_A = \infty$. $\square$

1.2 Elementare Funktionen: exp/log

Lemma 1.2.0. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Exponentialreihe*

$$\exp(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

absolut.

Beweis : Nach A.6.1. ist $\frac{1}{n!} < \frac{e^{n-1}}{n^n}$, also für $b > 0$, $\frac{b^n}{n!} < (\frac{be}{n})^n \leq 1$ sofern $n \geq b \cdot e$, d.h. $R_{\exp} = +\infty$. □

Satz 1.2.1.

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$$

Beweis :

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

Wegen

$$\begin{aligned} 1 \geq \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{n^k} &= 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k \\ &\geq 1 - \frac{k(k-1)}{n} \end{aligned}$$

ist

$$\exp(1) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \geq e_n \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-1)k}{k!} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n} \exp(1).$$

□

Theorem 1.2.2. $e \notin \mathbb{Q}$

Beweis :

$$\widehat{e}_n := \sum_{k \leq n} \frac{1}{k!}, \ \widehat{\widehat{e}}_n := \widehat{e}_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Wegen

$$e = \widehat{e}_n + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(n+k)!} < \widehat{e}_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(n+1)^k}$$

ist $\widehat{e}_n < e < \widehat{\widehat{e}}_n$. Angenommen $e = \frac{m}{n}$, $m, \ n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist

$$n!\, e = m(n-1)! \text{ und } n!\, \widehat{e}_n \in \mathbb{N},$$

also

$$n!\,(e - \widehat{e}_n) \in \mathbb{N}, \text{ aber } 0 < n!\,(e - \widehat{e}_n) < n!\,(\widehat{\widehat{e}} - \widehat{e}_n) = n! \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{n} \leq 1.$$

□

Theorem 1.2.3 (Funktionalgleichnug der exp**-Funktion).**

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y),\ \ x,\ \ y \in \mathbb{R}.$$

Beweis : Für festes $x, y \in \mathbb{R}$ sei 10/12/99

$$A(t) := \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} t^n,\ \ B(t) := \sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{n!} t^n.$$

A, B sind Potenzreihen mit den Koeffizienten $\frac{x^n}{n!}$ bzw $\frac{y^n}{n!}$ und Konvergenzradius $+\infty$.

$$C(t) = A(t)\cdot B(t) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k+z=n} \frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^z}{z!}\right) t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(x+y)^n \cdot t^n.$$

Für $t = 1$ hat man $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$. □

Folgerung 1.2.4.

(1) $\exp(0) = 1,\ \exp(1) = e$

(2) $\exp(x) > 0,\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(3) $\exp(x) < \exp(y)$ *für* $x < y$

Theorem 1.2.5. *Es gibt genau eine Abbildung*

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

so dass

E1: $E(x+y) = e(x)\cdot E(y)$

E2: $E(x) < E(y)$ *für* $x < y$

E3: $E(1) = e$

nämlich $x \mapsto E(x) = e^x = \exp(x)$.

Beweis : $x \mapsto \textit{log}\ E(x)$ ist die Identität auf $\mathbb{R}$. Daher ist E die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus. □

Folgerung 1.2.6.

(1) $\exp\circ\log = id_{\mathbb{R}_+},\ \log\circ\exp = id_{\mathbb{R}}$

(2) $\exp\frac{x}{1+x} \leq 1+x \leq \exp x,\ \ x > -1$
$\exp\ x \leq \frac{1}{1-x} \leq \exp\frac{x}{1-x},\ \ x < 1.$

Insbesondere: $1 + x \leq \exp x \leq \frac{1}{1-x},\ \ -1 < x < 1.$

Beweis : $1 - \frac{1}{y} \leq \log y \leq y - 1,\ \ y = x + 1$ bzw. $\frac{1}{y} = 1 - x$. □

Kapitel 2

Stetige Funktionen

2.0 Stetige Funktionen auf Intervallen

$\emptyset \neq X$ Menge, $\mathbb{R}^X = \{f : X \to \mathbb{R}\}$

Bemerkung 2.0.0 (vgl. 1.0.8). *Die Menge $\mathbb{R}^X$ der auf X reellwertigen Funktionen ist auf natürliche Weise eine $\mathbb{R}$ -Algebra mit $\mathbb{1}$:*

$$(f \dot{\pm} g)(x) := f(x) \dot{\pm} g(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

$$\mathbb{1}(x) := 1$$

für alle $x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $\mathbb{R}^X$ partiell geordnet:

$$f \leq g :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x),\ x \in X.$$

Mit $f,\ g$ liegt auch $f \overset{\wedge}{\vee} g,\ |f|$ in $\mathbb{R}^X$:

$$f \overset{\wedge}{\vee} g(x) := f(x) \overset{\wedge}{\vee} g(x),\ x \in X.$$

Durch $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^X,\ \lambda \mapsto \lambda \cdot \mathbb{1}$, wird $\mathbb{R}$ mit den konstanten, reellwertigen Funktionen auf X identifiziert.

EX:

$f_+ := f \vee 0,\ f_- := -(f \wedge 0),\ f_\pm \geq 0,$
$f = f_+ - f_-,\ |f| = f_+ + f_-.$

Definition 2.0.1. $\overline{x} \in X \subset \mathbb{R},\ f \in \mathbb{R}^X$, *d.h.* $f : X \to \mathbb{R}$

(1) f stetig in $\overline{x}$:$\Leftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $|x - \overline{x}| < \delta$.

(2) f stetig (auf X):$\Leftrightarrow$ f stetig in allen Punkten $x \in X$.

EX:

[1] $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

f unstetig in $\overline{x} = 0$, stetig in allen $x > 0$.

Beweis : $\overline{x} = 0$: wäre f stetig in $\overline{x}$, so gäbe es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ so dass $f(x) = |f(x) - f(\overline{x})| < 1$ für alle $|x - \overline{x}| < \delta,\ x \geq 0$. Nach Archimdedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n} < \delta$, insbesondere $n \geq 1$. $f\left(\frac{1}{n}\right) = n \geq 1$, ein Widerspruch.

$\overline{x} > 0$: Für $|x - \overline{x}| < \frac{1}{2}\overline{x}$ ist $x \cdot \overline{x} \geq \overline{x}\Big||x - \overline{x}| - |\overline{x}|\Big| \geq \frac{1}{2}\overline{x}^2$, also

$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{\overline{x}}\right| = \frac{|\overline{x} - x|}{x\overline{x}} \leq \frac{2}{\overline{x}^2}|x - \overline{x}|$. Wähle zu $\varepsilon > 0$ deshalb $0 < \delta \leq \min\{\frac{1}{2}\overline{x}, \frac{\overline{x}^2}{2} \cdot \varepsilon\}$. □

[2] $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in allen $\overline{x} \in \mathbb{R}$.

Beweis : $|\exp x - \exp \overline{x}| = (\exp \overline{x}) \cdot |\exp(x - \overline{x}) - 1|$. Für $-\frac{1}{2} < (x - \overline{x}) < \frac{1}{2}$ ist $x - \overline{x} < \exp\,(x - \overline{x}) - 1 < \frac{x - \overline{x}}{1 - (x - \overline{x})} < 2|x - \overline{x}|$ d.h.

$|\exp x - \exp\ \overline{x}| < 2|x - \overline{x}| \cdot \exp\ \overline{x}$. Wähle zu $\varepsilon > 0$ deshalb

$0 < \delta \leq \min\{\frac{1}{2},\ \frac{\varepsilon}{2 \exp\ \overline{x}}\}$. □

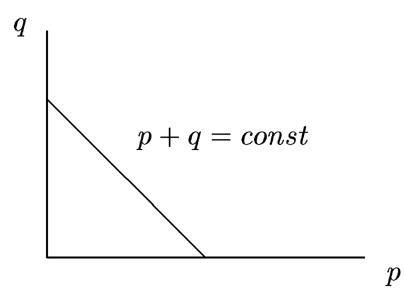
[3] $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}, \psi(x) := \begin{cases} 0 & x \ \mathit{irrational} \\ \frac{1}{p+q} & x = \frac{p}{q}\ \mathit{rational},\ p, q \in \mathbb{N} \\ & q \neq 0,\ ggT(p,q) = 1 \end{cases}$ 14/12/99

z.B. $\psi(0) = 1,\ \psi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}, \psi(1) = \frac{1}{2}$

ψ ist stetig in allen irrationalen Punkten und unstetig in allen rationalen Punkten.

Beweis : $\overline{x} = \frac{p}{q}$ rational: Wäre ψ stetig in $\overline{x}$, so gäbe es zu $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\psi(\overline{x}) = \frac{1}{2(p+q)}$ ein $\delta > 0$, so dass $|\frac{1}{p+q} - \psi(x)| < \varepsilon$ für alle $|x - \frac{p}{q}| < \delta,\ x \in [0,1]$. Für ein derartiges irrationales x ist dann $\frac{1}{p+q} < \frac{1}{2(p+q)}$, ein Widerspruch.

$\overline{x}$ irrational: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Paare natürlicher Zahlen $(p,q) \neq 0$ so dass $p + q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ □



$x_1, \ldots, x_s$ seien die diesen Paaren entsprechenden rationalen Zahlen. Wähle $\delta := \frac{1}{2}\min\{|x_1 - \overline{x}|, \ldots, |x_s - \overline{x}|\}$. Ist dann $x = \frac{p}{q} \in [0,1]$ rational und $|x - \overline{x}| < \delta$ so ist $x \neq x_1, \ldots, x_s$, also $|\psi(x) - \psi(\overline{x})| = \frac{1}{p+q} < \varepsilon$.

Satz 2.0.2. $\overline{x} \in X,\ f : X \to \mathbb{R}$

äq

(i) f stetig in $\overline{x}$

(ii) $f(x_n) \to f(\overline{x})$ für alle Folgen $x_n \to \overline{x},\ x_n \in X$.

Beweis : $(i) \to (ii)$: $x_n \to \overline{x},\ x_n \in X$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$ für alle $|x - \overline{x}| < \delta,\ x \in X$. Wähle N so dass $|x_n - \overline{x}| < \delta,\ n \geq N$.
$(ii) \to (i)$: Sonst gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ so dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $x_\delta \in X$ gibt mit $|x_\delta - \overline{x}| < \delta$, aber $|f(x_\delta) - f(\overline{x})| \geq \varepsilon_0$. Wähle zu $\delta_n = \frac{1}{n}$ jeweils $x_n \in X$ mit $|x_n - \overline{x}| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(\overline{x})| \geq \varepsilon_0$. Widerspruch. □

EX:

$X := [0,1) \cup \{2\},\ f : X \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 1 & x = 2 \\ x & x \neq 2 \end{cases}$
f ist stetig. $X \ni x_n \to 2 \Rightarrow x_n = 2$ für fast alle n.

Folgerung 2.0.3. $f,\ g \in \mathbb{R}^X,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \overline{x} \in X,\ Y \subset X$.
Ist $f,\ g$ *stetig in* $\overline{x}$*, so ist auch* $f \dot{\pm} g,\ \lambda \cdot f, \frac{f}{g}$ *sofern definiert*
$f \overset{\wedge}{\vee} g,\ |f|,\ f|Y$ *sofern* $\overline{x} \in Y$*, stetig in* $\overline{x}$.

Folgerung 2.0.4. *Die Menge* $C(X) := \{f : X \to \mathbb{R}$ *stetig*$\}$ *der auf* X *stetigen Funktionen ist auf natürliche Art und Weise eine* $\mathbb{R}$*-Algebra.*

EX:

$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$

$$x \mapsto p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ Polynome vom Grade } n$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots a_n$.
p ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Folgerung 2.0.5. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{R},\ \overline{x} \in X$.
Ist f *stetig in* $\overline{x}$ *und* g *stetig in* $\overline{y} = f(\overline{x})$*, so ist* $g \circ f$ *stetig in* $\overline{x}$.

EX: $a > 0,\ x \mapsto a^x = \exp(x \log a)$ stetig.

Theorem 2.0.6 (lokale Beschränktheit). $f : X \to \mathbb{R}$ *stetig in* $\overline{x} \in X$,
$a, b \in \mathbb{R}$ *so dass* $a < f(\overline{x}) < b$. *Dann gibt es ein* $\delta > 0$ *so dass* $a < f(x) < b$ *für alle* $|x - \overline{x}| < \delta,\ x \in X$.

Beweis : Wähle $\delta > 0$ zu $\varepsilon := \min\{f(\overline{x}) - a,\ b - f(\overline{x})\} > 0$. □

Bezeichnung Mit $B(X)$ wird die $\mathbb{R}$-Algebra der auf X beschränkten Funktionen bezeichnet, d.h. derjenigen $f \in \mathbb{R}^X$ für die es ein $c \geq 0$ gibt mit

$$|f(x)| \leq c \text{ für alle } x \in X.$$

EX: $x \mapsto \exp(-x^2)$ ist durch 1 beschränkt, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber unbeschränkt.

Theorem 2.0.7. $a \leq b \Rightarrow C[a,b] \subset B[a,b]$.

WARNUNG: Für offene Intervalle ist das Theorem falsch: $(0,1) \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist unbeschränkt.

Beweis : $A := \{\tau \in [a,b] \big| f|[a,\tau] \text{ beschränkt}\}$. Wegen der lokalen Beschränktheit gibt es ein $a < \overline{\tau} \le b$ so dass $f|[a,\overline{\tau}]$ beschränkt, d.h. $[a,\overline{\tau}] \subset A$, insbesondere existiert $\tau_* := \sup\ A,\ a < \tau_* \le b$. Wegen der lokalen Beschränktheit in τ_* gibt es $a < \alpha < \tau_* < \beta$ so dass $f|[\alpha,\beta] \cap [a,b]$ beschränkt, d.h. $f|[a,\beta] \cap [a,b]$ ist beschränkt. Ist $\beta \le b$, so ist $\beta \in [a,b]$, also $\beta \le \tau_*$, ein Widerspruch, also $\beta > b$ und damit $[a,\beta] \cap [a,b] = [a,b]$, f also insgesamt beschränkt. □

Folgerung 2.0.8 (Satz vom Maximum). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $x_*,\ x^* \in [a,b]$, so dass*

$$f(x_*) \le f(x) \le f(x^*)$$

für alle $x \in [a,b]$, d.h. jede stetige Funktion nimmt in $[a,b]$ Maximum und Minimum an.

Beweis : $M := \sup f[a,b]$ existiert. Angenommen $M \ne f(x)$ für alle x. Dann ist $M - f(x) > 0$ und $x \mapsto g(x) := \frac{1}{M-f(x)}$ stetig auf $[a,b]$. Nach Theorem 2.07 ist g beschränkt, daher gibt es ein C so dass $0 < \frac{1}{M-f(x)} \le C$ für alle $x \in [a,b]$, also $0 < \frac{1}{c} \le M - f(x)$. Daher gibt es ein C, so dass $0 < \frac{1}{M} - f(x) \le C$ für alle $x \in [a,b]$, also $0 < \frac{1}{C} \le M - f(x)$ und damit $f(x) \le M - \frac{1}{C}$, also $M \le M - \frac{1}{C}$, ein Widerspruch. □

Theorem 2.0.9 (Zwischenwertsatz). *$a, b \in I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a < b$, $\xi \in \mathbb{R},\ f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so dass $f(a) \le \xi \le f(b)$ bzw. $f(a) \ge \xi \ge f(b)$. Dann gibt es ein $a \le \overline{x} \le b$, so dass $f(\overline{x}) = \xi$.*

Beweis Œ: $f(a) < \xi < f(b)$. Definiere $g : [a,b] \to \mathbb{R},\ g(x) := f(x) - \xi$. Dann ist g stetig, 15/12/99
$g(a) < 0,\ g(b) > 0,\ A := \{\tau \in [a,b] \big| \ g|[a,\tau] < 0\}$. Nach der lokalen Beschränktheit gibt es ein $a < \overline{\tau} \le b$, so dass $g|[a,\overline{\tau}] < 0$. Insbesondere gibt es $\tau_* := \sup A,\ a < \tau_* \le b,\ g(\tau_*) \le 0$, also $\tau_* \ne b$. Wäre $g(\tau_*) < 0$, so gäbe es wieder wegen der lokalen Beschränktheit $a < \alpha < \tau_* < \beta < b$, so dass $g|[\alpha,\beta] < 0$ und damit $g|[a,\beta] < 0$, folglich $\beta \le \tau_*$, ein Widerspruch. □

Folgerung 2.0.10. *$\emptyset \ne I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch bild $f = f(I)$ ein Intervall.*

Folgerung 2.0.11. *$a \le b,\ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.*
$\underline{M} := \min f[a,b] \le \overline{M} := \max f[a,b]$. Dann ist $f[a,b] = [\underline{M}, \overline{M}]$.

EX:

[1] $\overline{\mathbb{R}}_+ \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}_+,\ x \mapsto x^n,\ n > 0$, surjektiv.
Beweis : $\xi \in \overline{\mathbb{R}}_+ : f(0) = 0 \le \xi < 1 + n\xi \le f(1+\xi)$ nach Bernoulli, also $\xi \in [f(0),\ f(1+\xi] \subset$bild f nach Folgerung 2.0.10. □

[2] $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ surjektiv.
Beweis : Für $\xi \ge 1$ ist $\exp(0) = 1 \le \xi < 1 + \xi \le \exp(1+\xi)$, also
$\xi \in [\exp(0),\ \exp(1+\xi)] \subset$ bild exp.

Für $0 < \xi < 1$ ist $\frac{1}{\xi} > 1$, also $\frac{1}{\xi} = \exp(x),\ x \in \mathbb{R}, \xi = \exp(-x)$,
d.h. $\xi \in$ bild exp. □

[3] Jedes Polynom p ungeraden Grades
$x \mapsto p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_n \neq 0,\ n = 2m+1$, hat eine reelle Nullstelle.
Beweis : Œ $a_n = 1$. Für $|x| \gg 0$ ist dann $\frac{p(x)}{x^n} = 1 + \frac{1}{x} \cdot a_{n-1} + \ldots + \frac{1}{x^n} \cdot a_0 \geq \frac{1}{2}$, d.h. $p(x) > 0$ für $x \gg 0,\ p(x) < 0$ für $-x \gg 0$. □

Definition 2.0.12. *I Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$.*
f streng monoton steigend :⇔ $f(x) < f(y)$ für alle $x < y,\ x, y \in I$.
f streng monoton fallend :⇔ $f(x) > f(y)$ für alle $x < y,\ x, y \in I$.

Satz 2.0.13. *$f : I \to \mathbb{R}$ stetig*

äq

(i) f injektiv

(ii) f streng monoton.

Beweis : Nur $(i) \Rightarrow (ii)$ ist relevant.Œ $\emptyset \neq I \neq pt.\ a, b \in I,\ a < b$. Œ $f(a) < f(b)$. Dann ist aufgrund der Injektivität und des ZWS $f(a) < f(x) < f(b)$ für alle $a < x < b$. Das selbe Argument auf $[x, b]$ angewendet liefert $f(x) < f(y) < f(b)$ für alle $x < y < b$, d.h. $f|[a, b]$ streng monoton steigend. Daher ist $f|[A, B]$ streng monoton steigend für alle $[a, b] \subset [A, B] \subset I$ und damit f. □

Satz 2.0.14. *I Intervall, $f := I \to \mathbb{R}$ stetig, injektiv, $J :=$ bild f. Dann gibt es genau ein $g : J \to I$, so dass*

(1) $f \circ g = id_J,\ g \circ f = id_I$

(2) g stetig.

EX:

$$f : [0,1) \cup \{2\} \longrightarrow [0,1],\ f(x) := \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$
ist stetig, bijektiv. Die Umkehrabbildung ist unstetig.

Beweis : $J :=$ *bild* f ist ein Intervall, $f : I \to J$ bijektiv. Deshalb gibt es genau ein $g : J \to I$, so dass $g \circ f = id_I,\ f \circ g = id_J$. Es genügt zu zeigen, dass $g|[A, B]$ stetig ist, für alle $[A, B] \subset I,\ A < B$. Œ f streng monoton steigend, $[A, B] = f[a, b],\ [a, b] \subset I,\ a < b$. $\overline{x} := g(\overline{y}) \in (a, b),\ \overline{y} \in (A, B),\ \varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $0 < \mu < \varepsilon$, so dass $[\overline{x} - \mu,\ \overline{x} + \mu] \subset (a, b)$, also $f[\overline{x} - \mu, \overline{x} + \mu] = [f(\overline{x} - \mu),\ f(\overline{x} + \mu)] \subset (A, B)$. Dann gibt es ein $0 < \delta$, so dass $[\overline{y} - \delta,\ \overline{y} + \delta] \subset [f(\overline{x} - \mu),\ f(\overline{x} + \mu)]$, also
$g(\overline{y} - \delta,\ \overline{y} + \delta) \subset [\overline{x} - \mu,\ \overline{x} + \mu] \subset (\overline{x} - \varepsilon,\ \overline{x} + \varepsilon)$. Die Stetigkeit von $g|[A, B]$ in den Randpunkten verläuft im wesentlichen genauso. □

2.1 Folgen stetiger Funktionen

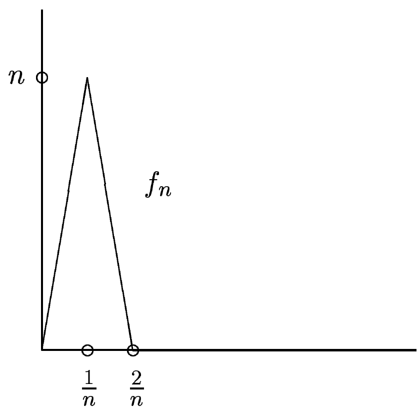
$\emptyset \neq X$ Menge, $f,\ f_n \in \mathbb{R}^X,\ n = 0, 1, 2, ...$

Definition 2.1.0. $(f_n)_{n \geq 0}$ *konvergiert punktweise gegen* f
$:\Leftrightarrow f_n(x) \to f(x)$ *für alle* $x \in X$.

Liegt punktweise Konvergenz vor, schreibt man $f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} f$ oder
$f = \text{ptw-lim } f_n$.

EX:

[1] $X = \overline{\mathbb{R}}_+$



$$f = ptw - \lim f_n = 0$$

[2] $X = [0, 1],\ f_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := x^n$

$$f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} f,\ f(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Moral: $f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} f,\ f_n$ stetig $\overset{i.a.}{\not\Rightarrow}$ f stetig.

Bemerkung 2.1.1.

(1) (f_n) *konvergiert punktweise* $\Leftrightarrow$ (f_n) *punktweise Cauchy-Folge.*

(2) $f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} f,\ g_n \underset{ptw}{\longrightarrow} g,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$f_n \dot{\pm} g_n \underset{ptw}{\longrightarrow} \dot{\pm} g$
$\lambda \cdot f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} \lambda \cdot f$
$|f_n| \underset{ptw}{\longrightarrow} |f|$

Definition 2.1.2. $f \in BX$

$$||f|| := \sup\{|f(x)|\ |x \in X\} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Supremumsnorm von f *auf* X.

Bemerkung 2.1.3.

[1] $|f(x)| \leq ||f||$ *für alle* $x \in X$.

[2] $||f||$ *ist i.a. kein Funktionswert:* $||id_{(0,1)}|| = 1$.

[3] $\emptyset \neq Y \subset X,\ f \in BX \Rightarrow ||f|Y|| \leq ||f||$.

[4] $||\,|f|\,|| = ||f||$.

Bemerkung 2.1.4. *Die Abbildung* $||\ || : BX \to \overline{\mathbb{R}}_+, f \mapsto ||f||$, *hat folgende Eigenschaften:*

N1: $||f|| \geq 0,\ ||f|| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

N2: $||\lambda \cdot f|| = |\lambda| \cdot ||f||,\ \lambda \in \mathbb{R}$

N3: $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$.

Beweis (Exemplarisch N3): $x \in X$,
$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f|| + ||g||$, also

$$||f + g|| = \sup_{x \in X} |(f+g)(x)| \leq ||f|| + ||g||.$$

$\square$

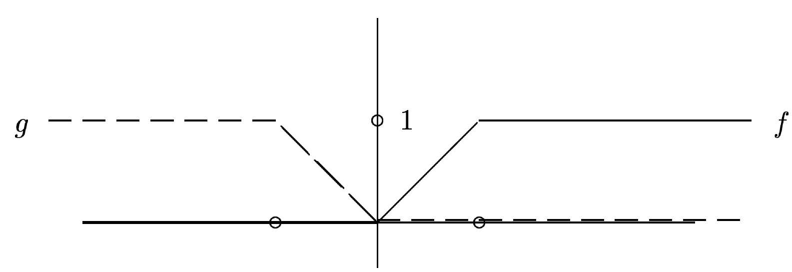
Folgerung 2.1.5.

(1) $||f \cdot g|| \leq ||f|| \cdot ||g||$

(2) $\Big|\,||f|| - ||g||\,\Big| \leq ||f \pm g|| \leq ||f|| + ||g||$

(3) $||f|| \leq ||g||$ *für* $-g \leq f \leq g$.

WARNUNG: Die Norm ist i.a. nicht multiplikativ, d.h. $||f \cdot g|| \overset{i.a.}{\neq} ||f|| \cdot ||g||$



$f \cdot g = 0, ||f|| \cdot ||g|| = 1$.

Definition 2.1.6. $f,\ f_n \in \mathbb{R}^X$ *so dass* $f_n - f,\ f_n - f_m \in BX$ *für alle* n, m

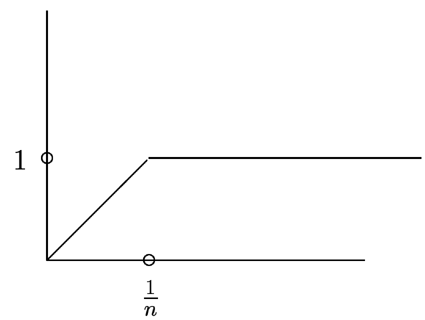
(1) f_n *konvergiert gleichmäßig gegen* $f :\Leftrightarrow ||f_n - f|| \to 0$.

(2) f_n *gleichmäßige Cauchy-Folge* $:\Leftrightarrow$ *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$, *so dass* $||f_n - f_m|| < \varepsilon$ *für alle* $n,\ m \geq N$.

Liegt gleichmäßige Konvergenz vor, so schreibt man $f_n \underset{|| \, ||}{\longrightarrow} f$ bzw.
$f = || \, ||\text{-lim } f_n$, oder auch $f_n \underset{glm}{\longrightarrow} f$. Der gleichmäßige Limes f ist 1-deutig bestimmt, falls er existiert.

EX:

[1] $X = \overline{\mathbb{R}}_+,\ f_n(x) := \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{n} \\ nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$



$f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} f,\ f(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, aber: $f_n \underset{|| \, ||}{\not\longrightarrow} f$
Für $x = \frac{1}{2n}$ ist nämlich $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}$, d.h. $||f_n - f|| \geq \frac{1}{2}$ für alle n.

[2] $X = [0, \frac{1}{2}], f_n(x) = x^n, ||f_n|| \leq \frac{1}{2^n},\ d.h.\ ||f_n|| \underset{|| \, ||}{\longrightarrow} 0.$

Bemerkung 2.1.7. $f_n, f \in BX$.

[1] $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f \Rightarrow f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} f$.

[2] $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f \Rightarrow f \in BX, (\|f_n\|)$ *beschränkt.*

[3] $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f,\ g_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} g,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f_n \pm g_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f \pm g,\ \lambda \cdot f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} \lambda \cdot f,$
$|f_n| \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} |f|$.

Satz 2.1.8. $f_n \in BX,\ n = 0, 1, 2, ...$

äq

(i) (f_n) $\|\ \|$*-Cauchy-Folge*

(ii) Es gibt ein $f \in BX$, *so dass* $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f$.

Beweis : $(ii) \Rightarrow (i) :\ \|f_n - f_m\| \le \|f_n - f\| + \|f - f_m\|$.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein N so dass $|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $n,\ m \ge N$. Für alle x ist deshalb $(f_n(x))$ eine reelle CF. Insbesondere existiert $f(x) = \lim\ f_n(x)$, d.h. $f = ptw. \lim\ f_n$. In der Grenze ist
$|f_n(x) - f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{4}$ und zwar unabhängig von $x \in X$, also $\|f_n - f\| \le \frac{\varepsilon}{4} < \epsilon$ für alle $n \ge N$.
□

Satz 2.1.9. $f_n \in BX,\ n = 0, 1, 2, ...\ ,\ C \ge 0$ *so dass*

$$\sum_{k \in E} \|f_k\| \le C$$

für alle $\emptyset \ne E \subset \mathbb{N}$ *endlich. Dann konvergiert* $\sum\limits_{n \ge 0} f_n$ *absolut und gleichmäßig.*

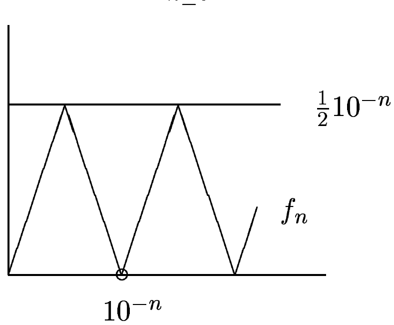
EX: $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_n(x) := 10^{-n} \cdot \{10^n \cdot x\}$ wobei 21/12/99

$$\{a\} := \min\{|a - n| \,\big|\, n \in \mathbb{N}\},$$

insbesondere $0 \le a \le \frac{1}{2}$. Deshalb ist $\|f_n\| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$, also

$$\sum_{n \in E} |10^{-n} \cdot \{10^n x\}| \le \sum_{n \in E} \|f_n\| \le \frac{1}{2} \sum_{n \ge 0} 10^{-n} = \frac{5}{9}.$$

Damit konvergiert $\sum_{n \ge 0} f_n$ absolut und gleichmäßig.



Theorem 2.1.10. *$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f_n \in CX, n = 0,1,2,\ldots$ $f : X \to \mathbb{R}$ so dass $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f$. Dann ist auch $f \in CX$.*

EX:

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$. f_n konvergiert nicht gleichmäßig, da sonst $\|\ \|$-$\lim f_n =$ *ptw.* $\lim\ f_n = f$,

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$$

und f stetig wäre.

Beweis : $x,\ \overline{x} \in X$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\overline{x})| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\overline{x})| + |f_n(\overline{x}) - f(\overline{x})| \\ &\leq \|f - f_n\| + |f_n(x) - f_n(\overline{x})| + \|f_n - f\|. \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein N so dass

$$\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n \geq N$. Da f_N stetig gibt es ein $\delta > 0$ so dass $|f_N(x) - f_N(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $|x - \overline{x}| < \delta,\ x \in X$, also $|f(x) - f(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, |x - \overline{x}| < \delta,\ x \in X$. □

Theorem 2.1.11 (Dini[1]). *$a \leq b$, $f, f_n \in C[a,b]$, $n = 0,1,2,\ldots$ so dass $f_n \nearrow f$, d.h. $f_n(x) \nearrow f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f. Analog für $f_n \searrow f$.*

EX: $f_n : [a,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt[n]{x}, a > 0$. $f_n \nearrow 1$ und damit $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} 1$.

Beweis : Œ $f_n \searrow 0$. Angenommen (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \geq k$ gibt mit $\|f_{n_k}\| \geq \varepsilon$. Insbesondere gibt es $x_k \in [a,b]$ so dass $f_{n_k}(x_k) \geq \frac{1}{4}\varepsilon$.
Œ $x_k \to \overline{x} \in [a,b]$. Dann gibt es ein N so dass $0 \leq f_n(\overline{x}) \leq f_N(\overline{x}) < \frac{\varepsilon}{8}$ für alle $n \geq N$. Da f_N stetig, gibt es ein $\delta > 0$ so dass $f_N(x) < \frac{\varepsilon}{8}$ für alle $|x - \overline{x}| \leq \delta,\ x \in [a,b]$. Da $x_k \to \overline{x}$ gibt es zu $\delta > 0$ ein $M > N$ so dass $|x_k - \overline{x}| < \delta,\ k \geq M$. Dann ist aber $n_k \geq k \geq M \geq N$, also $\frac{\varepsilon}{4} \leq f_{n_k}(x_k) < \frac{\varepsilon}{8}$. □

Satz 2.1.12. *$A(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R_A > 0,\ 0 \leq r < R_A$. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ auf $[-r,r]$ absolut und gleichmäßig.*

Folgerung 2.1.13. *$x \mapsto A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ stetig auf $(-R_A, R_A)$*

[HS] $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

äq

[1] Ulisse Dini (1845-1918)

(i) f stetig

(ii) $f|[A,B]$ stetig für alle $[A,B] \subset (a,b)$.

Theorem 2.1.14 (Abelscher Grenzwertsatz).
$A(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ konvergent für $|x| < 1$, $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ konvergent und $\tilde{A} : (-1,1] \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\tilde{A}(x) := \begin{cases} A(x) & |x| < 1 \\ \sum\limits_{n\geq 0} a_n & x = 1 \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{A} : (-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig.

EX:

$A(x) = \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ konvergent für $-1 < x \leq 1$, divergent für $x = -1$;
A stetig auf $(-1,1]$.

[HS] (σ_n) Nullfolge. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C \geq 0$ so dass

$$\left| \sum_{n\geq 0} \sigma_n x^n \right| \leq C + \frac{\varepsilon}{1-|x|}, \ |x| < 1.$$

Beweis des HS: $\sum\limits_{n\geq 0} \sigma_n x^n$ hat einen Konvergenzradius ≥ 1. Für $|x| < 1$ hat man also absolute Konvergenz. Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein N so dass $|\sigma_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also

$$\left| \sum_{n\geq 0} \sigma_n x^n \right| \leq \sum_{n\geq 0} |\sigma_n||x|^n \leq \sum_{n\leq N} |\sigma_n||x|^n + \varepsilon \sum_{n\geq N} |x|^n \leq \sum_{n\leq N} |\sigma_n| + \frac{\varepsilon}{1-|x|}.$$

□

Beweis des AGWS: $s_n := \sum\limits_{k\leq n} a_k$. (s_n) ist beschränkt, $s := \lim s_n$. Die Potenzreihe $\sum\limits_{n\geq 0} s_n x^n$ hat einen Konvergenzradius ≥ 1,

$$A(x) = (1-x) \cdot \sum_{n\geq 0} s_n \cdot x^n$$

$$S = (1-x) \cdot \sum_{n\geq 0} s \cdot x^n.$$

Daher ist für $|x| < 1$

$$\tilde{A}(x) - \tilde{A}(1) = A(x) - s = (1-x) \sum_{n\geq 0} (s_n - s) x^n,$$

also für $0 < x < 1$

$$\tilde{A}(x) - \tilde{A}(1) \leq (1-x) \left(C + \frac{\varepsilon}{1-x} \right), \ C = C_\varepsilon.$$

Ist $0 < x < 1$, $|x-1| < \delta := \frac{\varepsilon}{C+1}$ so ist $|\tilde{A}(x) - \tilde{A}(1)| < 2\varepsilon$. □

2.2 Elementare Funktionen: cos/sin

HS $a_n \neq 0$ für alle $n \geq 0, |a_{n+1}/a_n| \to \triangle$. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n$ absolut für $\triangle < 1$ und divergiert für $\triangle > 1$.

Beweis : Sei $\triangle < \eta < 1$. Dann ist für fast alle n der Quotient $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \eta$. Ist $\triangle > 1$ so ist für fast alle n der Quotient ≥ 1. □

Mit Hilfe dieses HS beweist man leicht:

Satz 2.2.0. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Reihen*

$$\cos(x) := \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) := \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

absolut.

Folgerung 2.2.1. $x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x)$ *stetig.*
cos *gerade, d.h.* $\cos(x) = \cos(-x)$
sin *ungerade, d.h.* $\sin(x) = -\sin(-x)$,
$\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$.

Theorem 2.2.2.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y).$$

Beweis : Vgl. Additionstheorem von exp. □

Lemma 2.2.3. *In dem offenen Intervall* $(0, \sqrt{6})$ *ist* cos *streng monoton fallend und* sin *positiv. Außerdem gibt es genau ein* $\alpha \in (0, \sqrt{6})$ *so dass*
$\cos(\alpha) = 0$, *genauer:* $\alpha \in [\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Definition 2.2.4. $\pi := 2\alpha$

Beweis : $0 < x < y < \sqrt{6}$, $\cos(x) - \cos(y) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{y^{2n+2}-x^{2n+2}}{(2n+2)!}$. 11/01/00
Die Koeffizienten $a_n := \frac{y^{2n+2}-x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ haben folgende Eigenschaften:

(1) $0 < a_n$

(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Nach Leibniz gilt für die Reihe $s = \sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$

$$s_0 > s_2 > ... > s_{2n} > ... > s > ... > s_{2n+1} > ... > s_3 > s_1 = a_0 - a_1 > 0$$

d.h. cos ist in $(0, \sqrt{6})$ streng monoton fallend.
$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ sieht man folgendermaßen ein:
$d_n := y^n - x^n,\ d_{n+1} = y(y^n - x^n) + x^n(y - x)$
$y^{n+1} - x^{n+1} = (y - x)(y^n + y^{n-1}x + ... + x^n) > (n + 1)(y - x)x^n$
und damit

$$d_{n+1} < y \cdot d_n + \frac{1}{n+1} d_{n+1}$$

$$d_{n+2} < \frac{y^2}{(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{1}{n+2})} d_n$$

also
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{d_{2n+4}}{d_{2n+2}} \cdot (2n + 3)(2n + 4) < \frac{y^2}{(2n+2)(2n+3)} \leq \frac{y^2}{6},\ n \geq 0$. Mit $\sin(x) = \sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n b_n,\ b_n := \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ folgt $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \leq \frac{x^2}{6}$, d.h. für $0 < x < \sqrt{6}$ ist
$x = s_0 > s_2 > ... > \sin(x) > ... > s_3 > s_1 = x - \frac{x^3}{6}$
insbesondere

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin(x)}{x} < 1, \quad 0 < x < \sqrt{6}.$$

Für $0 < x < \sqrt{2},\ \cos(x) = \sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n c_n := \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ folgt
$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \leq \frac{x^2}{2}$, also
$1 = s_0 > s_2 > ... > \cos(x) > ... > s_3 > s_1 = 1 - \frac{x^2}{2} > 0$, insbesondere $\cos(\sqrt{2}) \geq 0$ und

$$0 < \frac{1 - \cos(x)}{x} < \frac{x}{2}, \ \ 0 < x < \sqrt{2}.$$

Für $y = \sqrt{3}$ ist $\cos \sqrt{3} = 1 - \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{y^{2n+2}}{(2n+2)!} < 1 - \frac{3}{2} < 0$. Daher gibt es nach dem ZWS ein $\alpha \in [\sqrt{2}\sqrt{3})$ so dass $\cos(\alpha) = 0$. □

Folgerung 2.2.5.

$$\lim \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

$$\lim \frac{1 - \cos x_n}{x_n} = 0$$

für alle $x_n \to 0, x_n \neq 0.$

Folgerung 2.2.6.

(1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

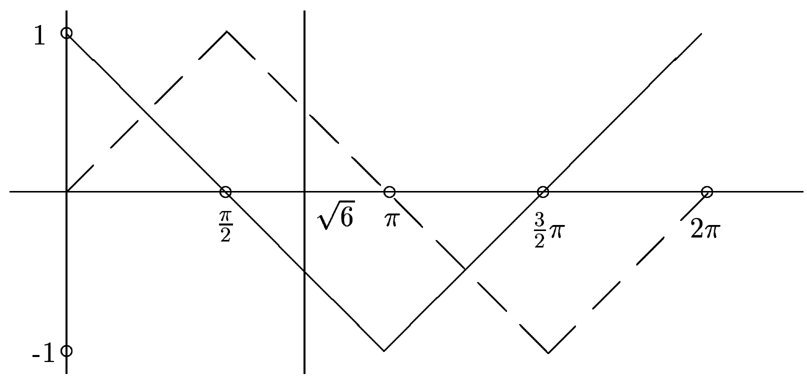
(2) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x,\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
$\cos(x + \pi) = -\cos x,\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x,\ \sin(x + 2\pi) = \sin x$
d.h. cos *und* sin *sind periodische Funktionen mit der Periode* 2π.

(3) $\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0$
$\cos \frac{\pi}{2} = 0,\ \sin \frac{\pi}{2} = 1$
$\cos \pi = -1,\ \sin \pi = 0$
$\cos 2\pi = 1,\ \sin 2\pi = 0$

(4) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

(5) $\cos \mathbb{R} = \sin \mathbb{R} = [-1, 1]$.

Bemerkung 2.2.7 (Approximativer Graph).



cos	$+\downarrow \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$	$-\downarrow \begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$	$-\uparrow \begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$	$+\uparrow \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$
sin	$+\uparrow \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$	$+\downarrow \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$	$-\downarrow \begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$	$-\uparrow \begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$

Folgerung 2.2.8.

(1) $NST(\cos) = \mathbb{Z} \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$

(2) $NST(\sin) = \mathbb{Z} \cdot \pi$.

Beweis : Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \cos \frac{\pi}{2}$.
Sei umgekehrt $\cos \overline{x} = 0$. Wähle $k \in \mathbb{Z}$, so dass $-\frac{\pi}{2} < \overline{x} - k\pi \leq \frac{\pi}{2}$. Dann ist $\cos(\overline{x} - k\pi) = \cos(-(\overline{x} - k\pi)) = \pm \cos \overline{x} = 0$, d.h. Œ $0 \leq \overline{x} - k\pi \leq \frac{\pi}{2}$, also $\overline{x} = k\pi + \frac{\pi}{2}$. □

Definition 2.2.9.

(1) $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}, \ x \notin \mathbb{Z}\pi + \frac{\pi}{2}$

(2) $\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}, \ x \notin \mathbb{Z}\pi$.

Bemerkung 2.2.10 (Ausblick). $z = x + iy \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \ x, y \in \mathbb{R}$. *Der Betrag* $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ *der komplexen Zahl* z *hat die drei charakteristischen Eigenschaften einer Norm*

N1: $|z| \geq 0, \ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

N2: $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

N3: $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Aufgrund der $\triangle$-Ungleichung (N3) kann man auch in $\mathbb{C}$ sinnvoll von konvergenten Folgen und Reihen reden, insbesondere konvergiert die Exponentialreihe

$$exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut, und nach dem allgemeinen Kommutativgesetz für absolut konvergente Reihen gilt auch in $\mathbb{C}$ das Additionstheorem

$$exp(z + w) = exp(z) \cdot exp(w).$$

Für $z = it,\ t \in \mathbb{R}$, schließlich ist

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t,$$

woraus

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt$$

folgt.
Das Additionstheorem des cos *und* sin *entspricht der Multiplikation komplexer Zahlen:*

$$\begin{aligned}
\cos(t + t') + \sin(t + t') &= \exp i(t + t') \\
&= \exp it \cdot \exp it' \\
&= (\cos t \cdot \cos t' - \sin t \cdot \sin t) \\
&\quad + i(\cos t \cdot \sin t' + \cos t' \cdot \sin t).
\end{aligned}$$

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 = 1\}$ *ist die sogenannte 1-Sphäre - der Rand eines Kreises vom Radius 1.*

Ⓢ Zu jedem $(x, y) \in S^1$ gibt es genau ein $t \in [0, 2\pi)$, so dass

$$\begin{aligned}
x &= \cos t \\
y &= \sin t.
\end{aligned}$$

Beweis : $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |x| \leq 1$. Da $\cos\ [0, 2\pi) = [-1, 1]$, gibt es ein $t \in [0, 2\pi)$ mit $\cos(t) = \cos(-t) = x$. Aus $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$ folgt
$y = \pm \sin t$. Ist $y = -\sin t$, so ist $\tau := -t + 2\pi \in [0, 2\pi)$ und $y = \sin \tau$,
$x = \cos \tau$.
Sei $0 \leq t < t' \leq 2\pi$ und $\cos t = \cos t',\ \sin t = \sin t'$. Dann ist entweder $0 \leq t < t' \leq \pi$ oder $\pi < t < t' < 2\pi$. Da in den Intervallen $[0, \pi]$ bzw. $[\pi, 2\pi]$ der cos streng monoton ist, ist $\cos t \neq \cos t'$ $\square$

Definition 2.2.11. *Seien p, $p' \subset [a, b]$ endliche Teilmengen.*
p Teilung (oder Partition) von $[a, b] :\Leftrightarrow a, b \in p$.
p' Verfeinerung von $p :\Leftrightarrow p \subset p'$

Die Punkte $t \in p$ einer Teilung p lassen sich anordnen: 12/01/00

$$p : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Sei $(x, y) = (\cos t,\ \sin t) \in S^1,\ t \in [0, 2\pi),\ p$ Teilung von $[0, t]$

$$p : 0 < t_0 < \ldots t_n = t$$

und s_p der Streckenzug von $(1, 0)$ nach (x, y) mit den Ecken $z_j := \exp it_j$, $j = 0, \ldots n$; die Strecke zwischen den Punkten $z_j,\ z_{j+1}$ ist gegeben durch

$$(1 - \tau)z_j + \tau z_{j+1},\ \tau \in [0, 1].$$

$$b(s_p) := \sum_{j=0}^{n-1} |z_{j+1} - z_j|$$

ist dann per definitionem die Länge des Streckenzuges s_p. Ist $p \subset p'$ eine Verfeinerung, so ist $b(s_p) \leq b(s_{p'})$.

Lemma 2.2.12. *p Teilung von $[0, t]$, $0 < \varepsilon$. Dann gibt es eine Verfeinerung $p \subset p'$, so dass*

(1) $(1 - \varepsilon)t \leq b(s_{p'}) \leq (1 + \varepsilon)t$

(2) $b(s_p) \leq b(s_{p'})$.

Beweis : Wähle $\delta > 0$, so dass

$$1 - \varepsilon < \frac{\sin \tau}{\tau} < \sqrt{1 + \varepsilon},\ 0 < \frac{1 - \cos \tau}{\tau} < \sqrt{\varepsilon},\ 0 < \tau < \delta.$$

Wähle Verfeinerung $p' : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ von p, so dass $\tau_j := t_{j+1} - t_j < \delta$. Dann ist $b(s_p) \leq b(s_{p'})$ und

$$\begin{aligned} b(s_{p'}) &= \sum_{j=0}^{n-1} |\exp(it_{j+1}) - \exp(it_j)| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} |\exp(i\tau_j) - 1| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(\cos \tau_j - 1)^2 + \sin^2 \tau_j}. \end{aligned}$$

Für jedes j ist

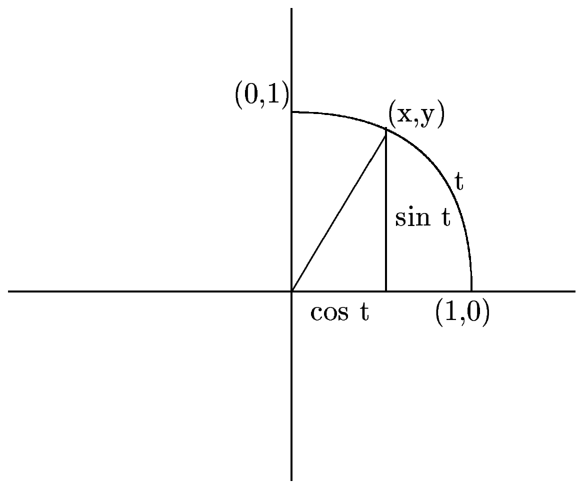
$$\tau_j(1 - \varepsilon) < \sqrt{(\cos \tau_j - 1)^2 + \sin^2 \tau_j} < \tau_j(1 + \varepsilon),$$

also nach Teleskop-Summation

$$t(1 - \varepsilon) < b(s_{p'}) < t(1 + \varepsilon).$$

□

Folgerung 2.2.13. *:* $\sup\{b(s_p) |\ p$ *Teilung von* $[0,t]\} = t$.
Dieses Supremum ist per Definition die Länge des Kreisbogens von $(1,0)$ *noch* (x,y). *Insbesondere ist die Gesamtlänge von* S^1 *gerade* 2π. *Sie liefert die von der Schule gewohnte Definition von* sin *und* cos.



Ergänzung (nicht Teil der Vorlesung)

$(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkte Folge reeller Zahlen.

$$\overline{a_n} := \sup\{a_k | k \geq n\} = \sup_{k\geq n} \ a_k$$

$$\underline{a_n} := \inf\{a_k | k \geq n\} = \inf_{k\geq n} \ a_k$$

Offenbar gilt

(1) $\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}$

(2) $\underline{a_n} \nearrow, \ \overline{a_n} \searrow$.

Da (a_n) beschränkt ist, existieren die Limiten $\lim \ \underline{a_n}$ bzw. $\lim \ \overline{a_n}$ und es gilt
$\overline{\lim} \ a_n := \lim \ \overline{a_n} = \inf_n \ \sup_{k\geq n} \ a_k$ („Limes superior")
$\underline{\lim} \ a_n := \lim \ \underline{a_n} = \sup_n \ \inf_{k\geq n} \ a_k$ („Limes inferior")

Ⓢ Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen

äq
(i) (a_n) ist konvergent
(ii) $\overline{\lim} \ a_n = \underline{\lim} \ a_n$.

Folgerung 2.2.14. *: Konvergiert (a_n), so ist*

$$\lim\ a_n = \overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n.$$

Beweis :
$(ii) \Rightarrow (i) : \underline{a_n} \le a_n \le \overline{a_n}$
$(i) \Rightarrow (ii) : \underline{\lim}\ \ a_n \le \lim\ a_n \le \overline{\lim}\ a_n.$
$a := \lim\ a_n$, $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \ge 0$, so dass $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \ge N$, also $a - \varepsilon \le a_n \le a + \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Dann ist
$a - \varepsilon \le \underline{\lim}\ a_n \le \overline{\lim}\ a_n \le a + \varepsilon$, d.h. $\underline{\lim}\ a_n = \overline{\lim}\ a_n = \lim\ a_n$. □

Theorem 2.2.15. *(Hadamard)*

$$\textit{Sei } A(x) = \sum_{n\ge 0} a_n x^n, \textit{ so dass } (\sqrt[n]{|a_n|}) \textit{ beschränkt.}$$

Dann ist

$$R_A = \begin{cases} \infty & \textit{falls } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} & \textit{falls } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \ne 0 \end{cases}$$

EX:

$$\text{Für } A(x) = \sum_{n\ge 0} (1 + (-1)^n) n \cdot x^n \text{gilt}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & n \equiv 1(2) \\ \sqrt[n]{2n} & n \equiv 0(2) \end{cases}$$

$$\text{also } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \text{ d.h. } R_A = 1$$

Beweis : Da $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt, ist $R_A > 0$. Zu $0 < t < R_A$ gibt es dann ein $c > 0$ so dass $|a_n t^n| \le c$, d.h. $\sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{\sqrt[n]{c}}{t}$ und damit $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{t}$. Ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \ne 0$, so ist $\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \ge t$, d.h. $\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \ge R_A$, insbesondere $R_A \ne \infty$.
Ist $0 < t < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$, so ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le \sup_{k \ge n}\ \sqrt[k]{|a_k|} \le \frac{1}{t}$$

für alle $n \ge N$, N geeignet, also $(a_n t^n)$ beschränkt, d.h. $R_A \ge \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
Ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und $1 > \varepsilon > 0$, so ist $\sqrt[n]{|a_n|} \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$, N geeignet, d.h. $(a_n \varepsilon^{-n})$ beschränkt und damit $R_A = \infty$. □

Kapitel 3

Integrierbare Funktionen

3.1 Regelfunktionen

Definition 3.1.0. *:* 15/01/00

$T : [a,b] \to \mathbb{R},\ \ f : [a,b] \to \mathbb{R}$

(1) *T Treppenfunktion auf $[a,b]$:$\Leftrightarrow$ Es gibt eine Partition $p : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ sowie $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ so dass $T(x) = y_i$ für alle $t_{i-1} < x < t_i$.*

(2) *f Regelfunktion auf $[a,b]$:$\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge (T_n) von Treppenfunktionen auf $[a,b]$, so dass $T_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f$.*

$T[a,b]$ bzw. $R[a,b]$ bezeichnet die Menge der Treppen- bzw. Regelfunktionen auf $[a,b]$.

EX: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \ irrational \\ \frac{1}{p+q} & x = \frac{p}{q},\ \ p,\ q \geq 0,\ \ q \neq 0,\ \ ggT(p,q) = 1 \end{cases}$$

$f \in R[0,1]$.

Denn: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele rationale Zahlen $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$, so dass $f(x_i) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Definiere für $0 \leq x \leq 1$

$$T(x) := \begin{cases} f(x) & x = x_i \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Dann gilt $T \in T[0,1]$ und $||T - f|| < \varepsilon$.

Bemerkung 3.1.1. *:*

[1] $\mathbb{R} \subset T[a,b] \subset R[a,b] \subset B[a,b]$.

[2] *$R[a,b]$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra. Mit f,g gehört auch $f \lozenge g, |f|$ zu $R[a,b]$.*

[3] $[A,B] \subset [a,b], f \in R[a,b] \Rightarrow f|[A,B] \in R[A,B]$

[4] *$a < c < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ so dass $f|[a,c], f|[c,b]$ Regelfunktion. Dann ist $f \in R[a,b]$.*

Satz 3.1.2. *:*
$f_n \in R[a,b], n = 0,1,2,3,\ldots$

$$\begin{array}{ll} \text{äq} & \\ (i) & (f_n)\ ||\ ||\text{-Cauchy-Folge} \\ (ii) & \text{Es gibt ein } f \in R[a,b] \text{ so dass } f_n \underset{||\ ||}{\longrightarrow} f. \end{array}$$

Beweis :
$(ii) \Rightarrow (i)$: ✓
$(i) \Rightarrow (ii)$: Es gibt ein $f \in B[a,b]$, so dass $f_n \underset{||\ ||}{\longrightarrow} f$. Sei $\varepsilon > 0$. Zunächst gibt es Treppenfunktionen T_n, so dass $||T_n - f_n|| < \frac{1}{n}$. Für $n \geq N$ geeignet ist $||f - T_n|| \leq ||f - f_n|| + ||T_n - f_n|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. □

Theorem 3.1.3. *:* $C[a,b] \subset R[a,b]$.

*Beweis :*Œ $a < b$. Für $\varepsilon > 0$ sei
$M := \{\tau \in [a,b]|$ es gibt ein $T \in T[a,\tau]$ so dass $||T - f|[a,\tau]|| < \varepsilon\}$.
Da f stetig, gibt es ein $0 < \delta$ so dass $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle
$|x-a| < 2\delta,\ x \in [a,b]$. Sei Œ $a + \delta \leq b$. Definiere für $a \leq x \leq a + \delta$
$T(x) := f(a)$. Dann ist $T \in T[a, a+\delta]$ und $||T - f|[a,a+\delta]|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ d.h. $[a,a+\delta] \subset M$. Daher existiert $\tau_0 := sup\ M, a < \tau_0 \leq b$. Sei $0 < \delta'$, so dass $|f(x) - f(\tau_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $|x - \tau_0| < \delta',\ x \in [a,b]$. Wähle $0 < \eta < \delta'$, so dass $a < \tau_0 - \eta$, und wähle $T \in T[a,\tau_0 - \eta]$ so dass $||f|[a,\tau_0 - \eta] - T|| < \varepsilon$. Definiere $\widetilde{T} : [a, \tau_0 + \eta] \to \mathbb{R}$ durch

$$\widetilde{T}(x) := \begin{cases} T(x) & a \leq x \leq \tau_0 - \eta \\ f(\tau_0) & \tau_0 - \eta < x \leq \tau_0 + \eta. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{T} \in T[a,\tau_0+\eta]$ und $||\widetilde{T}\big|[a,\tau_0+\eta] \cap [a,b] - f\big|[a,\tau_0+\eta] \cap [a,b]|| < \varepsilon$, also $\tau_0 + \eta > b$. □

Mit derselben Methode folgt

Theorem 3.1.4. *:*
Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.

*Beweis :*Œ $f \nearrow$. Definiere für $x \in (a,b)$
$f(x+) := inf\ \{f(y)|x < y\}$ und
$f(x-) := sup\ \{f(y)|y < x\}$ und analog

$f(a+)$ bzw. $f(b-)$.
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der Monotonie ein $\delta > 0$, so dass $a+\delta \le b$ und $f(a+) \le f(x) < f(a+) + \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $a < x \le a+\delta$. Definiere für $a \le x \le a+\delta$ die Funktion

$$T(x) := \begin{cases} f(a) & x = a \\ f(a+) & a < x \le a+\delta. \end{cases}$$

Dann ist $T \in T[a, a+\delta]$, $\big\|f\big|[a, a+\delta] - T\big\| < \varepsilon$.
$a < \tau_0 := sup\ M \le b$. Wähle $\eta > 0$, so dass $a \le \tau_0 - \eta$ und

$$f(\tau_0-) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) \le f(\tau_0-)$$

für alle $\tau_0 - \eta < x \le \tau_0$ bzw.

$$f(\tau_0+) \le f(x) < f(\tau_0+) + \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $\tau_0 < x \le \tau_0 + \eta$, $x \in [a, b]$ und $T \in T[a, \tau_0 - \eta]$ so dass
$\big\|f\big|[a, \tau_0 - \eta] - T\big\| < \varepsilon$. Definiere $\widetilde{T} : [a, \tau_0 + \eta] \to \mathbb{R}$ durch

$$\widetilde{T}(x) := \begin{cases} T(x) & a \le x \le \tau_0 - \eta \\ f(\tau_0-) & \tau_0 - \eta < x < \tau_0 \\ f(\tau_0) & x = \tau_0 \\ f(\tau_0+) & \tau_0 < x \le \tau_0 + \eta \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{T} \in T[a, \tau_0 + \eta]$ und $||f\big|[a, \tau_0 + \eta] \cap [a, b] - \widetilde{T}\big|[a, \tau_0 + \eta] \cap [a, b]|| < \varepsilon$, d.h. $\tau_0 + \eta > b$. $\square$

WARNUNG:

Die Komposition $f \circ g$ zweier Regelfunktionen f, g ist i.a. keine Regelfunktion.

$$g(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \cdot \sin \frac{1}{x} & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und daher $g \in R[0, 1]$.

$$\text{sign}(y) := \begin{cases} 1 & 0 < x \le 1 \\ 0 & 0 = x \\ -1 & -1 \le x < 0 \end{cases}$$

ist eine Treppenfunktion auf $[-1, 1]$, aber sign $\circ\, g$ ist keine Regelfunktion.

Satz 3.1.5. *:*
$f \in R[a, b]$, $h \in C[A, B]$, $\eta > 0$, so dass bild $f \subset [A + \eta, B - \eta]$.
Dann ist $h \circ f \in R[a, b]$.

EX: $f \in R[a, b]$, $C > 0$ so dass $f(x) \ge C$ für alle $x \in [a, b]$.
Dann ist $\sqrt{f} \in R[a, b]$.

[HS] $g : [A, B] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon \text{ für alle } |x - y| < \delta, \ x, \ y \in [A, B].$$

(g ist „gleichmäßig“ stetig!).

Beweis : Sonst gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, für das gilt: Zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es $x_n, y_n \in [A, B]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, aber $|g(x_n) - g(y_n)| \geq \varepsilon_0$.
Œ $x_n \to \overline{x}, \ y_n \to \overline{y}$. Wegen $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ist $\overline{x} = \overline{y} \in [A, B]$. Da g stetig, konvergiert $|g(x_n) - g(y_n)| \geq \varepsilon_0$ gegen $|g(\overline{x}) - g(\overline{y})| = 0$, ein Widerspruch. □

Beweis des Satzes:
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so dass $|h(z) - h(z')| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $|z - z'| < \delta, \ z, z \in [A, B]$. Zu $0 < \eta' < min \ \{\delta, \eta\}$ gibt es $T \in T[a, b]$ mit $||T - f|| < \eta'$, insbesondere

$$A \leq f(x) - \eta' < T(x) < f(x) + \eta' \leq B$$

für alle $x \in [a, b]$. Deshalb ist zunächst $h \circ T$ definiert, $h \circ T \in T[a, b]$ und $||h \circ f - h \circ T|| < \varepsilon$ □

Ergänzung 3.1.6. *(nicht Teil der VL)*

$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \ x \in [a, b)$.

Existiert für jede Folge $x_n \in [a, b]$, $x_n > x$, $x_n \to x$ der Limes $\lim f(x_n)$ und stimmen alle diese Limiten überein, so heißt
$f(x+) := \lim f(x_n)$ *der „rechtseitige“ Limes von f in x.*
Analog wird der „linksseitige“ Limes $f(x-)$ von f in $x \in (a, b]$ definiert.

Beispielsweise gilt:

f stetig in $x \in (a, b)$ genau dann, wenn $f(x) = f(x+) = f(x-)$.

Kriterium:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

äq
(i) $f \in R[a, b]$
(ii) *$f(x+)$ existiert für alle $x \in [a, b)$ und $f(x-)$ existiert für alle $x \in (a, b]$.*

EX: *Die Dirichlet*[1] *- Funktion*

[1] 1805 - 1859, deutscher Zahlentheoretiker

$D : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$D(x) := \begin{cases} 1 & x \textit{ rational} \\ 0 & x \textit{ irrational} \end{cases}$$

ist keine Regelfunktion.

3.2 Regelintegral

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion, $p : a = t_0 < t, < ... < t_n = b$ Teilung von $[a,b]$ so dass

$$\varphi\big|(t_{k-1}, t_n) = constant$$

für $k = 1, .., n$ („ φ-Teilung").

Definition 3.2.0.
$I_p(\varphi) := \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right)(t_k - t_{k-1})$ *heißt Integral von* φ *bzgl.* p *über* $[a,b]$.

Lemma 3.2.1.
p, p' $\varphi-$Teilungen von $[a,b]$. Dann ist $I_p(\varphi) = I_{p'}(\varphi)$.

Beweis : $p \cup p'$ verfeinert p und p'.
Induktion nach $\#(p \cup p' - p) : I_p(\varphi) = I_{p \cup p'}(\varphi)$. □

Die von der Teilung p unabhängige reelle Zahl 18/01/00

$$I(\varphi) := \int\limits_a^b \varphi(x)dx := I_p(\varphi)$$

heißt **das Integral von** φ **über** $[a,b]$.

Rechenregeln 3.2.2.
$\varphi, \psi \in T[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \leq c \leq b$.

(1) $I(\varphi + \psi) = I(\varphi) + I(\psi)$

(2) $I(\lambda \cdot \varphi) = \lambda \cdot I(\varphi)$

(3) $I(\varphi) \geq 0$, *falls* $\varphi \geq 0$
Insbesondere
$|I(\varphi)| \leq I(|\varphi|) \leq ||\varphi||(b-a)$.

(4) $I(\varphi) = 0$, *falls* $\#\{x \mid \varphi(x) \neq 0\} < \infty$

(5) $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \int\limits_a^c \varphi(x)dx + \int\limits_c^b \varphi(x)dx$.

Satz 3.2.3.
$f \in \mathbb{R}[a,b]$, $\varphi_n, \psi_n \in T[a,b]$, $n = 0,1,2,3,\ldots$ *so dass* $\varphi_n, \psi_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f$.
Dann existieren die Limiten

$$\lim I(\varphi_n),\ \lim I(\psi_n)$$

und stimmen überein:

$$-||f||(b-a) \leq \lim I(\varphi_n) = \lim I(\psi_n) \leq ||f||(b-a).$$

Beweis : $|I(\varphi_n) - I(\psi_m)| = |I(\varphi_n - \psi_m)| \leq ||\varphi_n - \psi_m||(b-a)$.
Daher ist sowohl $(I(\varphi_n))$ als auch $(I(\psi_n))$ eine CF reeller Zahlen;
$\lim I(\varphi_n) = \lim I(\psi_n)$.
Wegen $-||\varphi_n||(b-a) \leq I(\varphi_n) \leq ||\varphi_n||(b-a)$ und $||\varphi_n|| \to ||f||$ folgt die Abschätzung. □

Die von der approximierenden Folge (φ_n) unabhängige reelle Zahl $\lim I(\varphi_n)$ heißt **das Regelintegral**

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx := \lim I(\varphi_n)$$

von f über $[a,b\ ]$.

EX:

[1] $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x\ irrational \\ \frac{1}{p+q} & x = \frac{p}{q},\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1,\ p,q \geq 0 \end{cases}$$

Es gibt eine Folge φ_n von Treppenfunktionen, so dass

(1) $\varphi_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f$

(2) $\#\{x \mid \varphi_n(x) \neq 0\} < \infty$,

also $I(f) = \lim I(\varphi_n) = 0$.

[2] $0 < a \leq b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$

$$Ⓢ \quad \int_a^b f(x)dx = \begin{cases} log\ b - log\ a & \alpha = -1 \\ \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+a}) & \alpha \neq -1 \end{cases}$$

<u>Folgerung:</u> $\log y = \int_1^y \frac{dx}{x}$, $y \geq 1$.

Beweis der Folgerung:
$q := \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \geq 1,\ t_k := aq^k, a = t_0 < t_1 < .. < t_k = b.$
$\varphi_n(x) := \begin{cases} f(t_k) & x \in [t_k, t_{k+1}) \\ b^\alpha & x = b \end{cases}$
$||f - \varphi_n|| \leq ||f|| \left| \sqrt[n]{(\frac{b}{a})^\alpha} - 1 \right| \to 0$, also

$$\begin{aligned} I(f) &= \lim I(\varphi_n) \\ &= \lim \begin{cases} n(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1) & \alpha = -1 \\ a^{\alpha+1} \cdot (q-1) \cdot \frac{q^{n\cdot(\alpha+1)}-1}{q^{(\alpha+1)}-1} & \alpha \neq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \log b - \log a & \alpha = -1 \\ \\ \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) & \alpha \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Beachte: $\alpha \neq -1$

$$a^{\alpha+1} \cdot (q-1) \cdot \frac{q^{n(\alpha+1)}-1}{q^{\alpha+1}-1} = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \cdot \frac{n\left(\sqrt[n]{(\frac{b}{a})}-1\right)}{n\left(\sqrt[n]{(\frac{b}{a})^{\alpha+1}}-1\right)}$$

Der Quotient konvergiert gegen

$$\frac{\log(\frac{b}{a})}{\log(\frac{b}{a})^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

□

Satz 3.2.4.
Die Abbildung $I : R[a,b] \to \mathbb{R},\ f \mapsto I(f)$, hat folgende Eigenschaften:

I1: I $\mathbb{R}$-linear, d.h. $I(f+g) = I(f) + I(g),\ I(\lambda f) = \lambda \cdot I(f),\ \lambda \in \mathbb{R}$

I2: I positiv, d.h. $I(f) \geq 0$ für alle $f \geq 0$

I3: I additiv, d.h. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ für alle $a \leq c \leq b$.

Beweis : $I1$ und $I3$ gilt für Treppenfunktionen, also aufgrund der Stabilitätseigenschaften konvergenter Folgen auch für Regelfunktionen.
I2: Ist $\varphi_n \xrightarrow[|| \, ||]{} f = |f|$, so ist $|\varphi_n| \xrightarrow[|| \, ||]{} f$, also $I(f) = \lim I(|\varphi_n|) \geq 0$. □

Bemerkung 3.2.5.
Für $b \leq a$ definiert man

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx.$$

Dann gilt für je drei reelle Zahlen a, b, c

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(falls die Integrale definiert sind).

Folgerung 3.2.6.
$I : R[a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, d.h.

$$I(f) \leq I(g) \text{ falls } f \leq g.$$

Insbesondere: $|I(f)| \leq I(|f|) \leq ||f||(b-a).$

Folgerung 3.2.7.
$I : R[a,b] \to \mathbb{R}$stetig, d.h.

$$I(f_n) \to I(f) \text{ falls } f_n \underset{||\,||}{\longrightarrow} f.$$

Theorem 3.2.8.
Sei $\mu : R[a,b] \to \mathbb{R}$ derart, dass

(1) μ $\mathbb{R}$-linear

(2) $\mu \geq 0$

(3) $\mu\left(\chi_{[A,B]}\right) = B - A$ für alle $[A,B] \subset [a,b]$.

Dann ist $\mu = I$.

Beweis : Auf $T[a,b]$ ist $\mu = I$.
Da μ stetig, ist

$$\mu(f) = \lim \mu(\varphi_n) = \lim I(\varphi_n) = I(f), \text{ falls } \varphi_n \underset{||\,||}{\longrightarrow} f,\ \varphi_n \in T[a,b].$$

□

Theorem 3.2.9.
$f \in R[a,b]$. Dann ist die Abbildung

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

gleichmäßig stetig in $[a,b]$.

Zusatz: *Ist f stetig in $\overline{x} \in [a,b]$, so ist*

$$\lim \frac{F(x_n) - F(\overline{x})}{x_n - \overline{x}} = f(\overline{x})$$

für alle $x_n \to \overline{x}$, $x_n \in [a,b]$, $x_n \neq \overline{x}$.

Beweis : $x, y \in [a,b]$,
$|F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)dt| \leq ||f||\ |y-x|.$
$\left|\frac{F(x)-F(\overline{x})}{x-\overline{x}} - f(\overline{x})\right| = \frac{1}{|x-\overline{x}|}\left|\int_{\overline{x}}^x (f(t) - f(\overline{x}))dt\right| \leq \sup|f(t) - f(\overline{x})|$
wobei $x \neq \overline{x}$, $t \in [x, \overline{x}]$ bzw. $t \in [\overline{x}, x]$. □

EX: $a \leq b, n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b t^n dt = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

$t \mapsto t^n$ gerade für $n \equiv 0(2)$, ungerade für $n \equiv 1(2)$. Daher Œ $a = 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^b t^n dt &= \lim \int_{x_m}^b t^n dt, \ 0 < x_m \to 0 \\ &= \lim \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - x_m^{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} b^{n+1}. \end{aligned}$$

Satz 3.2.10.
$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R_A > 0$.
Dann ist

$$\int_a^b A(x)dx = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

für alle $[a, b] \subset (-R_A, R_A)$.

EX:

[1] $\int_a^b \begin{matrix} \sin \\ \cos \\ \exp \end{matrix} (x)dx = \begin{cases} -(\cos b - \cos a) \\ \sin b - \sin a \\ \exp b - \exp a \end{cases}$

[2] $0 < \Delta < 1$. Für $x \in [1 - \Delta, 1 + \Delta]$
konvergiert $\frac{1}{x} = \sum_{n \geq 0} (1 - x)^n$ gleichmäßig, also

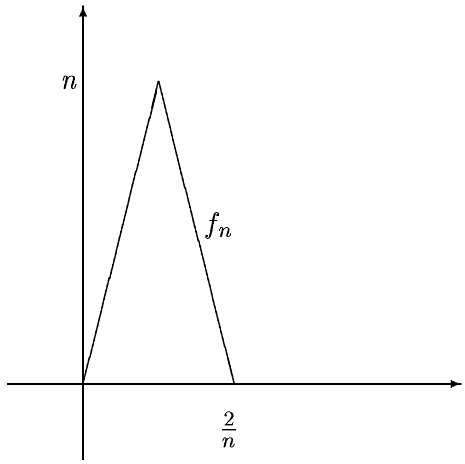
$$\log(1 + y) = \int_1^{1+y} \frac{dx}{x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}, \quad |y| < 1.$$

insbesondere:

$$\log 2 = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \tfrac{1}{n+1} \text{ nach dem Abelschen Grenzwertsatz.}$$

Bemerkung 3.2.11.
$f_n \xrightarrow[ptw]{} f, \quad f_n, f \in R[a, b] \quad \underset{i.a.}{\not\Rightarrow} \quad I(f_n) \to I(f)$

Gegenbeispiel:



$$f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} 0, \text{ aber } I(f_n) = 1.$$

Theorem (Arzela[2]-Osgood [3], ohne Beweis)
$f_n, f \in R[a,b], c \geq 0$ so dass

(1) $f_n \underset{ptw.}{\longrightarrow} f$

(2) $|f_n| \leq c$ *für alle* $n \geq 0$

Dann ist $\lim I(f_n) = I(f)$.

Satz 3.2.12.
$f, g \in R[a,b]$ so dass $\{x \big| f(x) \neq g(x)\}$ höchstens abzählbar.
Dann ist $I(f) = T(g)$.

Beweis : $h = |f - g|$, $\{x|h(x) \neq 0\} = \{x_0, x_1, ...\}$ paarweise verschieden.

$h_n := \sum\limits_{k \leq n} h(x_k)\chi_{x_k} \leq ||h||$

$|I(f) - I(g)| \leq I(|f - g|) = \lim I(h_n) = 0.$ □

Satz 3.2.13. ***(Mittelwertsatz der Integralrechnung)***
$f, g \in R[a,b]$, $g \geq 0$.
Dann gibt es ein $c \geq 0$, so dass

(1) $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) \leq c \leq \sup\limits_{x \in [a.b]} f(x)$

[2]Cesare Arzela (1847 - 1912), ital. Mathematiker
[3]William Fogg Osgood (1864 - 1943), amer. Mathematiker

(2) $I(f \cdot g) = c \cdot I(g)$

Folgerung 3.2.14.
Ist f stetig, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass $I(f) = f(\xi)(b - a)$.

EX: $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
Insbesondere ist sin bzw. cos gleichmäßig stetig.

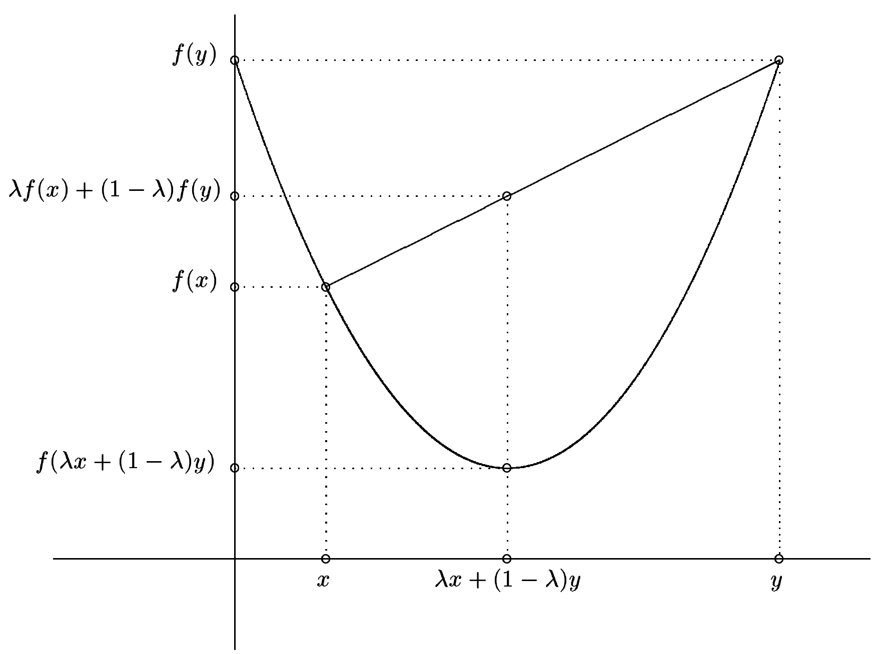
Definition 3.2.15.

$\emptyset \neq I$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$

(1) *f konvex* $:\Leftrightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x)$
für alle $x, y \in I,\ \lambda \in [0, 1]$.

(2) *f konkav* $:\Leftrightarrow -f$ *konvex.*

Graph einer konvexen Funktion f:



Satz 3.2.16.
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Regelfunktion,*
$F : [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt.$

(1) $f \geq 0 \Rightarrow F \nearrow$

(2) $f \nearrow \Rightarrow F$ *konvex.*

EX:

[1] exp konvex, log konkav

[2] $a_1, .., a_n > 0$
$a_i = \log y_i$
$\sqrt[n]{a_1 \cdot .. \cdot a_n} = \exp \frac{1}{n}(y_1 + .. + y_n) \leq \frac{a_1 + .. + a_n}{n}$

Beweis von 3.1.16:

(1) $x \leq y : F(y) - F(x) = \int\limits_x^y f(t)dt \geq 0.$

(2) $x \leq \lambda x + (1-\lambda)y \leq y,\ z := \lambda x + (1-\lambda)y.$
Œ$f \geq 0.$

$$\begin{aligned} F(z) &= \int\limits_a^z f(t)dt \\ &= \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) + \lambda \int_x^z f(t)dt + (1-\lambda)\int\limits_z^y f(t)dt \end{aligned}$$

$$\lambda \int\limits_x^z f(t)dt - (1-\lambda)\int\limits_z^y f(t)dt \leq \lambda f(z)(z-x) - (1-\lambda)f(z)(y-z) = 0.$$

□

[HS]
$a \leq b;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R},$ *so dass*

(1) $\Delta := det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} := \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$

(2) $-\frac{\delta}{\gamma} \notin [a,b],$ *falls* $\gamma \neq 0.$

Dann ist

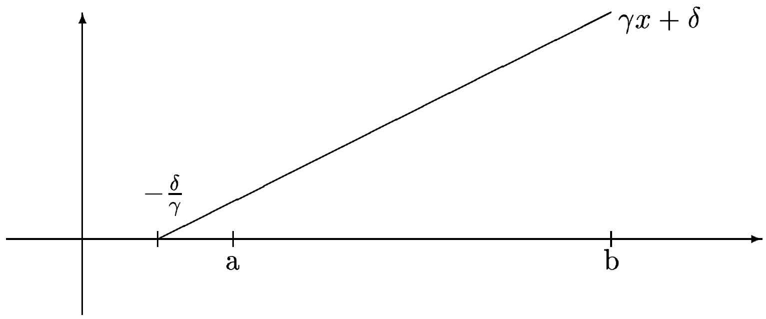
$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R},\ \varphi(x) := \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

stetig und

streng monoton wachsend, falls $\Delta > 0$, *bzw.*

streng monoton fallend, falls $\Delta < 0$.

Beweis :



$$\varphi(x) = \varphi(y) = \frac{\Delta(x-y)}{(\gamma y+\delta)(\gamma y+\delta)}.$$

In $[a, b]$ hat $\gamma x + \delta$ stets dasselbe Vorzeichen! □

Theorem 3.2.17.
φ wie im [HS], $[A, B] = bild\varphi$, d.h.$\{A, B\} = \{\varphi(a), \varphi(b)\}$,
$f \in R[A, B]$.
Dann ist

(1) $f \circ \varphi \in R[a, b]$

(2) $\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int\limits_{a}^{b} f \circ \varphi(x) \cdot \frac{\Delta}{(\gamma(x)+\delta)^2} dx.$

Beweis : $\gamma x + \delta \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
Da φ streng monoton ist, ist $T \circ \varphi \in T[a, b]$ für alle $T \in T[A, B]$,
$||f \circ \varphi - T \circ \varphi|| = ||f - t||$.
Œ$\varphi \nearrow$:

$\mu_1, \mu_2 : R[A, B] \to \mathbb{R}$,

$\mu_1(f) := \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy, \quad \mu_2(f) := \int\limits_{a}^{b} f \circ \varphi(x) \frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2} dx.$

μ_1, μ_2 sind $\mathbb{R}$-linear und positiv. Daher genügt es zu zeigen, dass

$$\mu_1(\chi_{[A',B']}) = \mu_2(\chi_{[A',B']})$$

für alle $[A', B'] \subset [A, B]$.
Zu $A \leq A' \leq B' \leq B$ gibt es 1-deutig bestimmte $a \leq a' \leq b' \leq b$, so dass $A' = \varphi(a')$, $B' = \varphi(b')$.

Dann ist

$\mu_1(\chi_{[A',B']}) = B' - A'$,

$$\mu_2(\chi_{[A',B']} = \int_{a'}^{b'} \frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2} dx.$$

$p : a' = t_0 < t_1 < .. < t_n = b'$, so dass $t_{k+1} - t_k = \frac{b'-a'}{n}$.

Definiere Treppenfunktion

$T_n : [a', b'] \to \mathbb{R}$,

$$T_n(x) := \begin{cases} \frac{\Delta}{(\gamma t_k+\delta)^2} & x \in [t_k, t_{k+1}) \\ \Delta(\gamma b' + \delta)^2 & x = b'. \end{cases}$$

$T_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} (x \longmapsto \frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2})$ auf $[a', b']$, d.h.

$\int_{a'}^{b'} \frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2} dx = \lim I(T_n)$.

$I(T_n) - (B' - A') = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta}{(\gamma t_k+\delta)^2}(t_{k+1} - t_k) - \sum_{k=0}^{n} (\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))$

Wegen

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \frac{\Delta(t_{k+1} - t_k)}{(\gamma t_{k+1} + \delta)(\gamma t_k + \delta)}$$

ist daher

$$|I(T_k) - (B' - A')| \leq const \sum_{k=0}^{n} (t_{k+1} - t_k)^3 \leq const \frac{1}{n}.$$

□

EX: $x > 0, L(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Mit $\varphi(y) := xy$ folgt $L(xy) = L(x) + L(y)$

Ausserdem ist $L(x) \leq x - 1$.

Ⓢ *$L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ so dass*

(1) $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$

(2) $L(x) \leq x - 1$

Dann ist $L = \log$.

Beweis : Wegen der Additivität ist $L(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} L(x)$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Wegen $L(x) \leq x - 1$ ist

$$n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) \leq -L\left(\frac{1}{x}\right) = L(x) = nL\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \leq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right),$$

also $L(x) = \log x$. □

3.3 Elementare Funktionen: arctan

Satz 3.3.0.
$x \longmapsto \arctan(x) := \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ *ist eine gleichmäßig stetige, streng monoton wachsende Funktion auf* $\mathbb{R}$ *mit*

(1) $\arctan \begin{cases} \textit{konvex} & x < 0 \\ \textit{konkav} & x > 0 \end{cases}$

(2) $\arctan \begin{cases} > 0 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ < 0 & x < 0 \end{cases}$

[HS] $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f \geq 0, I(f) = 0$.
Dann ist $f = 0$.
Insbesondere ist $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)dt$ streng monoton wachsend, falls $f > 0$.

Theorem 3.3.1.
$\alpha := 2 \cdot \arctan(1)$.

(1) $\arctan(x) + \arctan(-x) = 0$

(2) $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \alpha \cdot \operatorname{sign}(x), \quad x \neq 0$

(3) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}), \quad xy < 1$

Folgerung 3.3.2.
$xy > 1$
$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}) + \alpha(\operatorname{sign} x + \operatorname{sign} y)$.

Beweis :

(1): $\varphi(t) := -t$

(2): $\varphi(t) := \frac{1}{t}$

(3): $xy < 1, \quad y$ fest, $\quad \varphi(t) := \frac{t+y}{1-ty}$.

$\arctan(\frac{x+y}{1-xy}) = \arctan(y) + \int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{dt}{1+t^2}$.

$\int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^x \frac{1}{1+\varphi(s)^2} \cdot \frac{\Delta}{(1-sy)^2} ds = \int\limits_0^x \frac{ds}{1+s^2} = \arctan(x)$. □

Folgerung 3.3.3.

$$\arctan x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

Beweis : $\frac{1}{1+t^2} = \sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n t^{2n}$, $|t| < 1$, und Abelscher Grenzwertsatz. □

Satz 3.3.4.

$$bild(\arctan) = (-\alpha, \alpha)$$

Beweis :
Ist $x > 0$, so ist $0 < \arctan(x) < \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \alpha$, d.h.

$$\arctan(\mathbb{R}) \subset (-\alpha, \alpha), \quad \alpha > \varepsilon > 0.$$

Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\arctan(x) < \varepsilon$ für alle $|x| < \delta$. Für $0 < x < \delta$ ist dann $\arctan(\frac{1}{x}) > \alpha - \varepsilon$. Nach dem ZWS ist daher

$$[\alpha + \varepsilon, \alpha - \varepsilon] \subset bild(\arctan) \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Daraus folgt $(-\alpha, \alpha) \subset bild(\arctan)$. □

Die Additionstheoreme des cos und sin liefern für den tan

(1) $\tan(x + \pi) = \tan(x), \ x \notin \mathbb{Z} \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$

(2) $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) \cdot \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$

(3) $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

(4) $\tan(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \mathbb{R}$

Denn aus $2 \cos x \sin y = \sin(x + y) + \sin(y - x)$
folgt $2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = 1 = \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4}$, d.h.

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Satz 3.3.5.

$$\arctan \circ \tan \big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} = \mathrm{id}_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$$

Beweis :

$$(-\alpha, \alpha) \overset{\chi}{\twoheadrightarrow} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \overset{\tan}{\twoheadrightarrow} \mathbb{R} \overset{\arctan}{\twoheadrightarrow} (-\alpha, \alpha).$$

Die Komposition $\varphi := \arctan \circ \tan \circ \chi$ hat folgende Eigenschaften:

(1) φ stetig, surjektiv, ungerade

(2) $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$

(3) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad x, y \in [0, \frac{\alpha}{2})$.

Aus der Additivität folgt $\varphi(x \cdot \frac{\alpha}{2}) = x \cdot \frac{\alpha}{2}$ für alle $0 \leq x < 1$, d.h. $\varphi = id_{(-\alpha,\alpha)}$.
Insbesondere ist $\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ streng monoton wachsend, da
$\tan(0) = 0,\ \tan(1) = \frac{\pi}{4}$.
Schließlich folgt aus

$$\frac{y}{1+y^2} \leq \arctan(y) \leq y, \quad 0 < y$$

$$\lim \frac{\arctan(y_n)}{y_n} = 1, \quad y_n \to 0, \quad y_n > 0$$

und mit $y_n = \tan \frac{\pi x_n}{2\alpha}, \quad x_n > 0$

$$1 = \lim \frac{x_n}{\tan \frac{\pi x_n}{2\alpha}} = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \lim \frac{\frac{\pi x_n}{2\alpha}}{\sin \frac{\pi x_n}{2\alpha}} \cdot \cos \frac{\pi x_n}{2\alpha} = \frac{2\alpha}{\pi}$$

d.h. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. □

Folgerung 3.3.6.

(1) $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(2) $\tan \circ \arctan = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Kapitel 4

Differenzierbare Funktionen

4.0 Lineare Approximation

26/01/00

$X \subset \mathbb{R},\ \overline{x} \in \mathbb{R},\ f : X \to \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}$

Definition 4.0.0. *:*

(1) $\overline{x}$ Häufungspunkt von X $:\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge $x_n \in X,\ x_n \neq \overline{x}$, so dass $x_n \to \overline{x}$.

(2) A Grenzwert von f in dem Häufungspunkt $\overline{x}$ $:\Leftrightarrow$ $f(x_n) \to A$ für alle $x_n \to x,\ x_n \in X,\ x_n \neq \overline{x}$.

Lemma 4.0.1. *:*
$f : X \to \mathbb{R}$ hat in einem Häufungspunkt $\overline{x}$ von X höchstens einen Grenzwert A.
Hat f in $\overline{x}$ den Grenzwert A, so schreibt man dafür auch

$$A = \lim_{x \to \overline{x}} f(x).$$

Offenbar ist $A = \lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x)$ genau dann, wenn die Funktion

$$x \mapsto \widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq \overline{x} \\ A & x = \overline{x} \end{cases}$$

stetig in $\overline{x}$ ist.

EX: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Im folgenden sei $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, so dass jeder Punkt $x \in X$ Häufungspunkt von X ist. Offenbar hat jedes nicht-ausgeartete Intervall diese Eigenschaft, ebenso wie $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, nicht aber $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$.

Definition 4.0.2. *:*
$\overline{x} \in X,\ f : X \to \mathbb{R}$

(1) f linear approximierbar in $\overline{x}$ (differenzierbar in $\overline{x}$) $:\Leftrightarrow$ Es gibt ein $A \in \mathbb{R}$, $r : X \to \mathbb{R}$, so dass

D1: $f(x) = f(\overline{x}) + A(x - \overline{x}) + r(x)(x - \overline{x})$

D2: r *stetig in* $\overline{x}$, $r(\overline{x}) = 0$.

(2) f differenzierbar: $\Leftrightarrow$ f differenzierbar in allen $\overline{x} \in X$.

Lemma 4.0.3. *:*
Ist f in $\overline{x} \in X$ linear approximierbar, so sind A und r 1-deutig bestimmt.

Beweis : Da $\overline{x}$ Häufungspunkt, gibt es eine Folge $x_n \in X,\ x_n \neq \overline{x},\ x_n \to \overline{x}$. Aus $(A - A^*)(x_n - \overline{x}) = (r^*(x_n) - r(x_n))(x_n - \overline{x})$ folgt
$A - A^* = r^*(x_n) - r(x_n) \to 0$, d.h. $A = A^*,\ r = r^*$. □

Ist f in $\overline{x}$ linear approximierbar, so heißt die 1-deutig bestimmte reelle Zahl A die Ableitung von f in $\overline{x}$;

$$Df(\overline{x}) := \frac{df}{dx}(\overline{x}) := f'(\overline{x}) := A.$$

Bemerkung 4.0.4. *:* 28/01/00
f linear approximierbar in $\overline{x}$ $\underset{\overset{\not\Leftarrow}{i.a.}}{\Rightarrow}$ *f stetig in $\overline{x}$.*

EX:

[1] $x \mapsto |x|$ linear approximierbar in allen $\overline{x} \neq 0$; in $\overline{x} = 0$ ist die Funktion stetig, aber nicht linear approximierbar.

[2] Jede konstante Funktion f ist linear approximierbar, $Df(\overline{x}) = 0$ für alle $\overline{x}$.

[3] $n \in \mathbb{N}_+,\ x \mapsto f(x) := x^n$.
f ist in allen $\overline{x} \in \mathbb{R}$ linear approximierbar, und $Df(\overline{x}) = n \cdot \overline{x}^{n-1}$
denn :

$$x^n = \overline{x}^n + n \cdot \overline{x}^{n-1}(x - \overline{x}) + r(x)(x - \overline{x})$$

und

$$r(x) = \overline{x}^{n-1} + \overline{x}^{n-2}x + \ldots + \overline{x}x^{n-2} + x^{n-1} - n\overline{x}^{n-1}$$

Satz 4.0.5. *:*
$f : x \to \mathbb{R},\ \overline{x} \in X,\ A \in \mathbb{R}$

äq

(i) *f linear approximierbar in $\overline{x}$, $Df(\overline{x}) = A$.*

(ii) *Es gibt ein $h : X \to \mathbb{R}$, so dass*

(1) h stetig in $\overline{x}$, $h(\overline{x}) = A$

(2) $f(x) = f(\overline{x}) + h(x)(x - \overline{x})$.

(iii) $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \neq \overline{x}}} \dfrac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}$ *existiert und stimmt mit A überein.*

Folgerung 4.0.6. *:*
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion, $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$, $\overline{x} \in [a,b]$ so dass f stetig in $\overline{x}$. Dann ist F linear approximierbar in $\overline{x}$, $DF(\overline{x}) = f(\overline{x})$.

EX:

[1] $\exp' = \exp$

[2] $\log' x = \frac{1}{x}$

[3] $\sin' = \cos, \;\; \cos' = -\sin$

[4] $\arctan' = \frac{1}{1+sq}$.

WARNUNG:

Es gibt stetige Funktionen, die in keinem Punkt differenzierbar sind: $a \in \mathbb{N}_+$ ungerade, $0 < b < 1$ so dass $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$,
$x \mapsto f(x) := \sum\limits_{k \geq 0} b^k cos(a^k \pi x)$.
f stetig, $||f|| \leq \frac{1}{1-b}$, aber in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Rechenregeln 4.0.7. *:*
f, g linear approximierbar in $\overline{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) LINEARITÄT
$f \pm g$, $\lambda \cdot f$ linear approximierbar in $\overline{x}$, $D(f \pm g)(\overline{x}) = Df(\overline{x}) \pm Dg(\overline{x})$,
$D(\lambda \cdot f)(\overline{x}) = \lambda \cdot Df(\overline{x})$.

(2) PRODUKT-Regel
$f \cdot g$ linear approximierbar in $\overline{x}$, $D(f \cdot g)(\overline{x}) = Df(\overline{x}) \cdot g(\overline{x}) + f(\overline{x}) \cdot Dg(\overline{x})$.

(3) QUOTIENTEN-Regel
Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist $\frac{f}{g}$ linear approximierbar in $\overline{x}$,
$D(\frac{f}{g})(\overline{x}) = \frac{Df(\overline{x}) \cdot g(\overline{x}) - f(\overline{x}) Dg(\overline{x})}{g^2(\overline{x})}$.

EX:

[1] $p(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k,\ Dp(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

[2] $\tan = \frac{\sin}{\cos},\ D\tan = \frac{1}{\cos^2}$.

Exemplarischer *Beweis der QR:* Œ $f = 1$.
$g(x) = g(\overline{x}) + h(x)(x - \overline{x})$, h stetig in $\overline{x}$, $h(\overline{x}) = Dg(\overline{x})$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(\overline{x})} &= -\frac{g(x) - g(\overline{x})}{g(x) \cdot g(\overline{x})} \\ &= H(x)(x - \overline{x}) \end{aligned}$$

mit $H(x) = -\frac{h(x)}{g(x) \cdot g(\overline{x})}$. H stetig in $\overline{x}$, $H(\overline{x}) = -\frac{Dg(\overline{x})}{g(\overline{x})^2}$. □

Satz 4.0.8. ***(Kettenregel)**:*
$f : X \to \mathbb{R}$ linear approximierbar in $\overline{x}$,
$g : Y \to \mathbb{R}$ linear approximierbar in $\overline{y}$,
so dass $f(X) \subset Y$, $f(\overline{x}) = \overline{y}$.
Dann ist $g \circ f$ linear approximierbar in $\overline{x}$ und $D(g \circ f)(\overline{x}) = Dg(f(\overline{x})) \cdot Df(\overline{x})$.

EX: $a > 0$, $f(x) = a^{h(x)}$, h differenzierbar.
$Df(\overline{x}) = D(\exp \circ (\log a) h)(\overline{x}) = \log a \cdot Dh(\overline{x}) \cdot a^{h(\overline{x})}$.

Beweis der Kettenregel:
$f(x) = f(\overline{x}) + h(x)(x - \overline{x})$, h stetig in $\overline{x}$, $h(\overline{x}) = Df(\overline{x})$,
$g(y) = g(\overline{y}) + H(y)(y - \overline{y})$, H stetig in $\overline{y}$, $H(\overline{x}) = Dg(\overline{y})$.
$g \circ f(x) = g \circ f(\overline{x}) + H(f(x))h(x)(x - \overline{x})$.
$x \mapsto H(f(x))h(x)$ stetig in $\overline{x}$, $H(f(\overline{x})) \cdot h(\overline{x}) = Dg(f(\overline{x})) \cdot Df(\overline{x})$ □

Folgerung 4.0.9. *:*
$f : X \to Y$ bijektiv, $\overline{x} \in X$ so dass

(1) Jeder Punkt von X bzw. Y ist Häufungspunkt von X bzw. Y,

(2) f linear approximierbar in $\overline{x}$, $Df(\overline{x}) \neq 0$,

(3) f^{-1} stetig in $\overline{y} := f(\overline{x})$.

Dann ist f^{-1} linear approximierbar in $\overline{y}$ und $D(f^{-1})(\overline{y}) = \frac{1}{Df(\overline{x})}$.

EX: $D(\arctan)(y) = \frac{1}{D\tan(x)} = \cos^2 x = \cos^2(\arctan\ y) = \frac{1}{1+y^2}$.

WARNUNG:

f differenzierbar $\underset{i.a.}{\not\Rightarrow}$ f^{-1} differenzierbar:
$f(x) = x^3$ differenzierbar, aber $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ nicht differenzierbar in $\overline{y} = 0$, wobei $\sqrt[3]{y} := -\sqrt[3]{|y|}$ für $y < 0$.

Beweis : Ist f^{-1} linear approximierbar in $\overline{y}$ so ist
$1 = D(id)(\overline{x}) = D(f^{-1} \circ f)(\overline{x}) = Df^{-1}(f(\overline{x})) \cdot Df(\overline{x})$.
$f(x) - f(\overline{x}) = h(x)(x - \overline{x})$, h stetig in $\overline{x}$, $h(\overline{x}) = Df(\overline{x})$.
Da f injektiv, ist $h(x) \neq 0$ für alle $x \neq \overline{x}$.
$f^{-1}(y) - f^{-1}(\overline{y}) = x - \overline{x} = \frac{1}{h \circ f^{-1}(y)} \cdot (y - \overline{y}),\ y \neq \overline{y}$

$$y \mapsto H(y) := \begin{cases} \frac{1}{Df(\overline{x})} & y = \overline{y} \\ \frac{1}{h \circ f^{-1}(y)} & y \neq \overline{y} \end{cases}$$

ist stetig in $y = \overline{y}$. □

Definition 4.0.10. *:* 29/01/00
$\overline{x} \in X \subset \mathbb{R},\ f : x \to \mathbb{R}$

(1) $\overline{x}$ innerer Punkt von X :⇔ Es gibt ein offenes Intervall I, so dass $\overline{x} \in I \subset X$.

(2) f hat ein lokales Maximum bzw. Minimum in $\overline{x}$:⇔ Es gibt ein offenes Intervall J, so dass $\overline{x} \in J \subset X$ und $f(x) \leq f(\overline{x})$ bzw. $f(\overline{x}) \leq f(x)$ für alle $x \in J$.

Satz 4.0.11. *:*
$\overline{x} \in X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ linear approximierbar in $\overline{x}$, $Df(\overline{x}) > 0$.
Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

(1) $f(x) > f(\overline{x}),\ x \in X \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta)$

(2) $f(x) < f(\overline{x}),\ x \in X \cap (\overline{x} - \delta, \overline{x})$

Folgerung 4.0.12. *:*
Ist $\overline{x} \in X$ innerer Punkt und f ein lokales Extremum in $\overline{x}$, so ist $Df(\overline{x}) = 0$.

WARNUNG:

Das Verschwinden der Ableitung in einem inneren Punkt garantiert nicht, dass dort ein lokales Extremum vorliegt.
Gegenbeispiel: $x \mapsto x^3$, $\overline{x} = 0$.

Folgerung 4.0.13. *:*
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f\big|(a, b)$ linear approximierbar,
$\underline{x}$, $\overline{x} \in [a, b]$ so dass $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$ für alle $x \in [a, b]$.
Dann gilt $\underline{x}$, $\overline{x} \in \{a, b\} \cup \{x \in (a, b) \mid Df(x) = 0\}$, d.h. $\underline{x}$, $\overline{x}$ sind Randpunkte des Intervalls oder Nullstellen der Ableitung.

Theorem 4.0.14. ***(Satz von der Rolle*[1]*)***
$a < b,\ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f\big|(a,b)$ linear approximierbar, $f(a) = f(b)$.
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so dass $Df(\xi) = 0$.

Folgerung 4.0.15. *:*
$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, f, g linear approximierbar in (a,b), $Dg(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$.
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Insbesondere: $$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Beweis : Rolle: $g(b) - g(a) \neq 0$. Wende Rolle an auf

$$x \longmapsto F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

□

Folgerung 4.0.16. *:*
$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so dass f linear approximierbar in allen inneren Punkten von I.

äq

(i) $f \nearrow$

(ii) $Df \geq 0$.

Zusatz: Ist $Df > 0$, so ist f streng monoton steigend.

Beweis :
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* : ✓
(ii) $\Rightarrow$ *(i)* : Sonst gibt es $[x,y] \subset I,\ x < y$, so dass $f(x) > f(y)$, also $c \in (x,y)$ mit $f(y) - f(x) = Df(c)(y - x) < 0$, d.h. $Df(c) < 0$.
Ist $f(x) = f(y)$ für $[x,y] \subset I,\ x < y$, so ist nach Rolle $Df(c) = 0$ für ein $x < c < y$. □

Theorem 4.0.17. ***(MWS)***
$a < b,\ A \subset [a,b]$ höchstens abzählbar,
$g,\ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig,
$g,\ f$ linear approximierbar in $[a,b] \setminus A$, so dass

$$|Df(x)| \leq Dg(x) \text{ für alle } x \notin A.$$

Dann ist $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

[1] Michel Rolle (1652 - 1719), franz. Mathematiker

Folgerung 4.0.18. *:*

äq

(i) f *konstant*

(ii) $Df(x) = 0$ *für alle* $x \notin A$.

Folgerung 4.0.19. *:*
$f : I \to \mathbb{R}$ *linear approximierbar,* $\lambda \in \mathbb{R}$

äq

(i) $Df = \lambda \cdot f$

(ii) $f(x) = f(\overline{x}) \cdot \exp\left(\lambda(x - \overline{x})\right), \quad \overline{x} \in I$

Beweis des MWS:
Es genügt Folgendes zu zeigen: Für alle $\varepsilon > 0$ ist

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a + 2).$$

$\mathbb{N} \twoheadrightarrow A,\ n \longmapsto x_n$, Surjektion.

$$M := \left\{ \tau \in [a,b] \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{Für alle } a \leq x < \tau \text{ } ist \\ |f(x) - f(a)| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon \sum\limits_{x_n < x} 2^{-n} \end{array} \right\}$$

Da $a \in M$, existiert $\overline{x} := sup\ M,\ a \leq \overline{x} \leq b$.
Außerdem: $\overline{x} \in M$,

$$\begin{aligned} |f(\overline{x}) - f(a)| &\leq g(\overline{x}) - g(a) + \varepsilon(\overline{x} - a) + \varepsilon \sum_{x_n < \overline{x}} 2^{-n} \\ &\leq g(\overline{x}) - g(a) + \varepsilon(\overline{x} - a + 2). \end{aligned}$$

1. Fall: $\overline{x} \notin A$:

$f(x) - f(\overline{x}) = h(x)(x - \overline{x})$
$g(x) - g(\overline{x}) = H(x)(x - \overline{x}),\ h, H$ stetig in $\overline{x}$,
$|h(\overline{x})| = |Df(\overline{x})| \leq Dg(\overline{x}) = H(\overline{x})$.
Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass
$|h(x)| \leq H(x) + \varepsilon$ für alle $x \in [a,b] \cap [\overline{x}, \overline{x} + \delta]$.
Sei $y \in [a,b] \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta]$ und $\overline{x} \leq x < y$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - f(a)| \\ &\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \sum_{x_n < \overline{x}} 2^{-n} \\ &\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \sum_{x_n < x} 2^{-n}, \end{aligned}$$

d.h. $y \in M$, ein Widerspruch.

2. Fall: $\overline{x} = x_m \in A$:

Da f, g stetig, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(\overline{x})|, \ \ |g(x) - g(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-m},$$

insbesondere

$$g(\overline{x}) - \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} \leq g(x).$$

Sei $\overline{x} < x < y, \ \ y \in [a,b] \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta)$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} + g(\overline{x}) - g(a) + \varepsilon(\overline{x} - a) + \varepsilon \sum_{x_n < \overline{x}} 2^{-n} \\ &\leq \varepsilon \cdot 2^{-m} + g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \sum_{x_n < \overline{x}} 2^{-n} \\ &\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \sum_{x_n < x} e^{-m}, \end{aligned}$$

d.h. $y \in M$, erneut ein Widerspruch. $\square$

4.1 Stammfunktionen

Definition 4.1.0. *:*
$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f, F : I \to \mathbb{R}$.

F Stammfunktion f $:\Leftrightarrow$

(1) *F stetig*

(2) *Es gibt eine höchstens abzählbare Menge $A \subset I$, so dass F in jedem Punkt von $I \setminus A$ linear approximierbar ist und*
$$DF(x) = f(x) \text{ für alle } x \notin A.$$

Lemma 4.1.1. *:*
$F, \widetilde{F}$ Stammfunktionen von f.
Dann ist $\widetilde{F} = F + const.$

Beweis : allgemeiner Mittelwertsatz. □

Definition 4.1.2. *:*
$f : I \to \mathbb{R}$ lokale Regelfunktion $:\Leftrightarrow$ $f\big|[a,b]$ Regelfunktion für alle $[a,b] \subset I$.

Offenbar sind die stetigen Funktionen $C(I)$ und die monotonen Funktionen $Mon(I)$ Teilmenge der $\mathbb{R}$-Algebra $R_{loc}(I)$ der lokalen Regelfunktionen auf I. Ist $I = [a,b]$, so ist $R[a,b] = R_{loc}[a,b]$.

[HS] Eine lokale Regelfunktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Bemerkung: Die Umkehrung ist i.a. falsch.

Beweis des (HS):

(1) Ist $M = \bigcup\limits_{n \geq 0} M_n$ und jedes M_n höchstens abzählbar, so ist auch M höchstens abzählbar:
$\varphi_n : \mathbb{N} \twoheadrightarrow M_n$ induziert eine Surjektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow M$, $(n,m) \rightarrowtail \varphi_n(m)$.
Durch Komposition mit einer Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ findet man eine Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow M$.

(2) Da $I = \bigcup\limits_{n \geq o} [a_n, b_n]$, genügt es zu zeigen, dass eine Regelfunktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat.

(3) Sei $T_n \in T[a,b], f \in R[a,b]$, so dass $T_n \xrightarrow[\|\ \|]{} f$, und sei $\overline{x} \in [a,b]$ derart, dass jedes T_n stetig in $\overline{x}$.
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $||T_n - f|| < \frac{\varepsilon}{6}$, und ein $\delta > 0$, so dass $|T_N(x) - T_N(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{6}$ für alle $|x - \overline{x}| < \delta,\ x \in [a,b]$. Dann ist
$$\begin{aligned} |f(x) - f(\overline{x})| &\leq |f(x) - T_N(x)| + |T_N(x) - T_N(\overline{x})| + |T_N(\overline{x}) - f(\overline{x})| \\ &\leq 2\|f - T_n\| + |T_N(x) - T_N(\overline{x})| < \varepsilon, \end{aligned}$$
d.h. f ist ebenfalls stetig in $\overline{x}$. Insbesondere sind die Unstetigkeitsstellen von f eine Teilmenge der Unstetigkeitsstellen der T_n und daher höchstens abzählbar.

□

Theorem 4.1.3. ***(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)***

$f : I \to \mathbb{R}$ lokale Regelfunktion,
$\overline{x} \in I, \quad F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int\limits_{\overline{x}}^{x} f(t)dt.$
Dann gilt

(1) F ist eine Stammfunktion von f.

(2) Für jede Stammfunktion G von f ist

$$G\Big|_{\overline{x}}^{x} := G(x) - G(\overline{x}) = \int\limits_{\overline{x}}^{x} f(t)dt.$$

Beweis :
F ist stetig und bis auf eine höchstens abzählbare Menge differenzierbar, und dort ist $DF(x) = f(x)$. □

Bezeichnung: $C^1(I) := \{F : I \to \mathbb{R} \,|F \text{ differenzierbar}, DF \text{ stetig}\}$

Folgerung 4.1.4. *:*
Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} C^1(I) & \xrightarrow[surjektiv]{D} & C(I) \\ \downarrow & & \uparrow \cong \\ C^1(I)/\mathrm{kern}D & = & C^1(I)/\mathbb{R} \end{array}$$

Beweis :
Nach dem Hauptsatz ist D surjektiv, nach dem allgemeinen Mittelwertsatz kern $D = \mathbb{R}$. □

EX:

[1] $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x) \sin x dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx}(\sin x) dx = \frac{1}{2} \sin^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$

[2] $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ differenzierbar, so dass $f' \in R[a, b]$.

Dann ist $\frac{f'}{f} \in R[a,b]$ und

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}dx &= \int_a^b \frac{d}{dx}(\log f(x))dx \\ &= \log \circ f\Big|_a^b \\ &= \log\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right).\end{aligned}$$

Integrationsmethoden 4.1.5. *:*

[1] ***Partielle Integration***

$u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar so dass u', v' Regelfunktionen.
Dann ist $D(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$, d.h.

$$u \cdot v\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

oder

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

EX:

$$\int_a^b x \cdot \exp(x)dx.$$

Setze $u(x) := \exp(x), \quad v(x) := x.$

$$\begin{aligned}\int_a^b x \cdot \exp(x)dx &= \mathrm{id} \cdot \exp\Big|_a^b - \int_a^b \exp(x)dx \\ &= (\mathrm{id} - 1) \cdot \exp\Big|_a^b \\ &= (b-1)e^b - (a-1)e^a\end{aligned}$$

[2] ***Substitution***

$f : I \to \mathbb{R}$ lokale Regelfunktion,
$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass

(1) $\mathrm{bild}\varphi \subset I$
(2) $x \longmapsto f \circ \varphi \cdot \varphi'(x)$ *Regelfunktion auf* $[a,b]$.

F Stammfunktion von f.
Dann ist

$$\begin{aligned}(F \circ \varphi)' &= (f \circ \varphi) \cdot \varphi', \text{ d.h.} \\ (F \circ \varphi)\Big|_a^b &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_a^b (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)dx\end{aligned}$$

EX:

$$\int_a^b \frac{2x}{1+x^2} dx$$

Setze $\varphi(x) := 1 + x^2,\ \varphi'(x) = 2x,$ *sowie*
$f(y) := \frac{1}{y}$.
Dann ist

$$f \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = \frac{2x}{1+x^2},$$

also

$$\int_a^b \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dy}{y} = log\ \frac{1+b^2}{1+a^2}.$$

Definition 4.1.6. *:*

$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ Intervall,
$f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge.

(f_n) konvergiert lokal gleichmäßig $:\Leftrightarrow (f_n \big| [a,b])$ konvergiert gleichmäßig für alle $[a,b] \subset I$.

Beispielsweise konvergiert jede Potenzreihe $A(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ lokal gleichmäßig in ihrem Konvergenzintervall $(-R_A, R_A)$, falls $R_A > 0$.

Satz 4.1.7. *:*

$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $\overline{x} \in I$,
$f_n :\to \mathbb{R}$, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$ differenzierbar, so dass

(1) *$(f_n(\overline{x}))$ konvergent*

(2) *f_n' lokale Regelfunktionen*

(3) *(f_n') konvergiert lokal gleichmäßig.*

Dann konvergiert die Folge f_n lokal gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion f, und es gilt

$$f' = lim\ f_n'$$

d.h.

$$(D \circ lim)(f_n) = (lim \circ D)(f_n).$$

Hinweis: Die Voraussetzung, dass f_n' lokale Regelfunktionen sind, ist überflüssig: vgl. Dieudonné: Foundations of Modern Analysis 8.6.3

WARNUNG: Im allgemeinen ist $D \circ \lim \neq \lim \circ D$.

$f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(nx)$, $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} 0$, $f_n'(x) = \cos(nx)$. f_n' konvergiert noch nicht einmal punktweise:

$$cos(\pi n) = \begin{cases} 1 & n \equiv 0(2) \\ -1 & n \equiv 1(2) \end{cases}$$

Folgerung 4.1.8. *:*
$\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ *Reihe differenzierbarer Funktionen,*
$\sum\limits_{n \geq 0} f_n'$ *lokal gleichmäßig konvergente Reihe (lokaler Regelfunktionen),*
$\sum\limits_{n \geq 0} f_n(\overline{x})$ *konvergent für wenigstens ein* $\overline{x} \in I$.

Dann

konvergiert $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ *lokal gleichmäßig,*
$\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ *ist differenzierbar und*
$\left(\sum\limits_{n \geq 0} f_n\right)' = \sum\limits_{n \geq 0} f_n'$.

Beweis von Satz 4.1.7:
Es gibt eine lokale Regelfunktion g, so dass

$$f_n' \to g \ \text{ lokal gleichmäßig.}$$

Dann konvergiert auch die Folge F_n der Stammfunktionen

$$F_n(x) := \int_{\overline{x}}^{x} f_n'(t)dt \text{ von } f_n' \text{ lokal gleichmäßig}$$

gegen die Stammfunktion $G(x) := \int\limits_{\overline{x}}^{x} g(t)dt$ von g, da

$$|F_n(x) - G(x)| \leq \left\| (f_n' - g)\big|_{[a,b]} \right\| (b-a)$$

für alle $x \in [a,b] \subset I$ und alle Intervalle $[a,b]$, die $\overline{x}$ enthalten.

$$f_n = F_n + f_n(\overline{x})$$

konvergiert daher lokal gleichmäßig gegen

$$f := G + \lim f_n(\overline{x}).$$

A priori ist G und damit f stetig und bis auf eine höchstens abzählbare Menge A differenzierbar und damit

$$f'(x) = G'(x) = g(x) = \lim f_n'(x) \quad \text{für alle } x \notin A.$$

Tatsächlich ist G überall differenzierbar und $G'(x) = g(x)$ für alle $x \in I$.

Seien x_0, $\overline{x} \in [a,b] \subset I$. Für $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$, ist dann

$$\begin{aligned}
\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} - g(x_0) = \\
& \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(g(t) - f_n'(t) + f_n'(t) - f_n'(x_0) + f_n'(x_0) - g(x_0)\big)\, dt \\
& = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(g(t) - f_n'(t)\big)\, dt + \\
& + \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(f_n'(t) - f_n'(x_0)\big)\, dt + \\
& + \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(f_n'(x_0) - g(x_0)\big)\, dt
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} - g(x_0) = & \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(g(t) - f_n'(t)\big)\, dt + \\
& + \left(\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f_n'(x_0)\right) + \\
& + \big(f_n'(x_0) - g(x_o)\big)
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\left|\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right| \leq & 2\left\|\left(g - f_n'\right)|_{[a,b]}\right\| + \\
& + \left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f_n'(x_0)\right|
\end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es zunächst ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$2\left\|\left(g - f_n'\right)|_{[a,b]}\right\| < \frac{\varepsilon}{4},$$

und dazu dann ein $\delta > 0$, so dass

$$\left|\frac{f_N(x)-f_N(x_0)}{x-x_0} - f_N'(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

für alle $|x - x_0| < \delta$, $x \in [a,b]$, d.h. $G'(x_0) = g(x_0)$. $\square$

Satz 4.1.9. *:*
$A(x) := \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R_A > 0$.
Dann hat auch die formal abgeleitete Potenzreihe

$$A'_{form}(x) := \sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$$

den Konvergenzradius R_A,

A *ist differenzierbar in* $(-R_A, R_A)$ *und*

$A'(x) = A'_{form}(x)$ *für alle* $x \in (-R_A, R_A)$.

EX:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

Beweis von 4.1.9:
Es genügt zu zeigen, dass A'_{form} den Konvergenzradius R_A hat.
Sei $R := \sup\{t \geq 0 \big| \left(n a_n t^{n-1}\right) \text{ beschränkt}\}$, d.h. $R = R_{A'_{form}}$.
Sei $0 < t < R_A$. Wähle $\varepsilon > 0$ so dass $t < t(1+\varepsilon) < R_A$. Dann gibt es ein $C \geq 0$, so dass $|a_n t^n (1+\varepsilon)^n| \leq C$ für alle $n \geq 0$, also

$$\frac{C}{t} \geq |a_n t^{n-1}(1+\varepsilon)^n| \geq |a_n t^{n-1} \cdot n\varepsilon| \text{ nach Bernoulli}$$

und somit

$$|n a_n t^{n-1}| \leq \frac{C}{t\varepsilon},$$

d.h $0 < t \leq R$, also $R_A \leq R$.
Ist umgekehrt $0 < t < R$, so gibt es ein C, so dass $|n a_n t^{n-1}| \leq C$, d.h. $|a_n t^n| \leq C \cdot t$.
Daher ist auch $R \leq R_A$. □

Definition 4.1.10. *:*
$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ *Intervall,* $f : I \to \mathbb{R}$

(1) $f^{(0)} := f, \quad f^{(1)} := f', \ \dots \ f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$, *falls existent.*

(2) f *n-mal stetig differenzierbar* $:\Leftrightarrow$ $f^{(n)}$ *existiert und ist stetig.*

(3) f ∞*-oft stetig differenzierbar* $:\Leftrightarrow$ $f^{(n)}$ *existiert für alle* $n \geq 0$.

Für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ *schreibt man auch*

$$\frac{d^n}{dx^n} f \ \textit{oder}\ D^n f.$$

Durch Induktion beweist man leicht die sogenannte

$$\textbf{Leibniz-Regel}: \quad (f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

EX:

[1] $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f ist differenzierbar in $\mathbb{R}$, aber nicht stetig differenzierbar:

$$f'(x) := \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und $f'\left(\frac{1}{\pi n}\right) = \pm 1$.

[2] Sei $f : I \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar

$$\begin{array}{ll} \text{äq} & \\ (i) & f^{(0)} \text{ konvex} \\ (ii) & f^{(1)} \nearrow \\ (iii) & f^{(2)} \geq 0 \\ (iv) & f(x) \geq j^1_{\overline{x}} f(x) := f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) \end{array}$$

Folgerung 4.1.11. *:*
$x \mapsto A(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ ist in $(-R_A, R_A)$ ∞-oft differenzierbar, und es gilt

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}.$$

EX:

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1.$$

Folglich $\log^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$

Satz 4.1.12. ***(Taylorsche Formel)***
$\overline{x} \in I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ (n+1)-mal stetig differenzierbar.
Dann ist für $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\overline{x})}{k!} (x - \overline{x})^k + R_{n+1}(x)$$

mit dem „Restglied“

$$\mathbb{R}_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{\overline{x}}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Beweis :

Induktion:

$n = 0: \quad f(x) - f(\overline{x}) = \int\limits_{\overline{x}}^{x} f'(t)dt = R_1(x).$

Nach Induktion ist

$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{\overline{x}}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt.$

Partielle Integration liefert:

$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\overline{x})(x-\overline{x})^n + R_{n+1}(x).$ □

Folgerung 4.1.13. *:*
Es gibt eine Abbildung $\varepsilon : i \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(\overline{x})}{k!}(x-\overline{x})^k + \varepsilon(x)(x-\overline{x})^{x+1}$$

mit ε stetig in $\overline{x}$, $\varepsilon(\overline{x}) = 0$.

Beweis : Definiere

$$\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & x = \overline{x} \\ \frac{1}{(x-\overline{x})^{n+1}} R_{n+1}(x) - \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!} & x \neq \overline{x} \end{cases}$$

Da

$$\frac{1}{n+1} \int\limits_{\overline{x}}^{x} \frac{(x-t)^n}{(x-\overline{x})^{n+1}} dt = 1,$$

ist

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_{\overline{x}}^{x} \frac{(x-t)^n}{(x-\overline{x})^{n+1}} \left(f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(\overline{x}) \right) dt,$$

folglich

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{n!} \sup_{t \in J} |f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(\overline{x})|,$$

wobei $J = [\overline{x}, x]$ *bzw.*$[x, \overline{x}]$.

Da $f^{(n+1)}$ stetig, ist ε stetig in $\overline{x}$ und $\varepsilon(\overline{x}) = 0$. □

Anwendungen 4.1.14. *:*

[1] $f^{(n+1)} = 0 \Leftrightarrow f$ *Polynom vom Grade* $\leq n$

[2] ***(Regel von l'Hôpital)***
$f, g : I \to \mathbb{R}(n+1)$*-mal stetig differenzierbar,*
$\overline{x} \in I$ *so dass*

$$f^{(k)}(\overline{x}) = g^{(k)}(\overline{x}) = 0 \text{ für } k = 0, ..., n, \qquad g^{(n+1)}(\overline{x}) \neq 0.$$

Dann existiert

$$\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \neq \overline{x}}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und es gilt

$$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}$$

Denn:
Zunächst gibt es ein $\delta > 0$, so dass $g^{(n+1)}(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ mit $|x - \overline{x}| < \delta$. Für diese x ist dann

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\overline{x}) + (n+1)! \cdot \varepsilon_f(x)}{g^{(n+1)}(\overline{x}) + (n+1)! \cdot \varepsilon_g(x)}$$

Da ε_f und ε_g stetig in $\overline{x}$, $\varepsilon_f(\overline{x}) = \varepsilon_g(\overline{x}) = 0$, folgt die Behauptung.

EX:

$$\lim_{x \to 0} \frac{log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{log'(1+x)}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

[3] $\overline{x} \in I \subset \mathbb{R}$ *innerer Punkt,*
$f : I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$*-mal stetig differenzierbar,*
$f^{(k)}(\overline{x}) = 0$ *für* $k = 1, ..., n, f^{(n+1)}(\overline{x}) \neq 0.$

äq

(i) $\overline{x}$ *relatives Maximum von* f

(ii) $n+1$ *gerade und* $f^{(n+1)}(\overline{x}) < 0.$

Beweis zu [3]*:*

Zunächst gibt es ein $\delta > 0$, so dass $(\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta) \subset I$ und

$$f(x) - f(\overline{x}) = \left(\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\overline{x}) + \varepsilon(x) \right) (x - \overline{x})^{(n+1)}$$

für alle $x \in (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii):
Œ $f(x) - f(\overline{x}) \leq 0$ für alle $x \in (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta)$.
Für diese x ist dann, falls $n+1$ ungerade,

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\overline{x}) + \varepsilon(x) = \begin{cases} \geq 0 & x < \overline{x}, \\ \leq 0 & x > \overline{x}, \end{cases}$$

also $f^{(n+1)}(\overline{x}) = 0$, ein Widerspruch.
Ist $(n+1)$ gerade, so ist $f^{(n+1)}(\overline{x}) \leq 0$, also < 0, da $\neq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i):
Es gibt ein $0 < \eta < \delta$, so dass

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\overline{x}) + \varepsilon(x) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\overline{x}) < 0$$

für alle $|x - \overline{x}| < \eta$. □

EX:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ist

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{3n}} \cdot exp(-\frac{1}{x^2})$$

mit einem Polynom p_n vom Grad $\leq n$, insbesondere:

$$f^{(n)}(0) = 0 \text{ für alle } n \geq 0.$$

Definition 4.1.15. *:*
$\overline{x} \in X \subset I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \to \mathbb{R}$ *∞-oft differenzierbar*

(1)

$$j_{\overline{x}}^n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\overline{x})(x - \overline{x})^k$$

*heißt **n-Jet** (oder **n-tes Taylorpolynom**) von f in $\overline{x}$.*

(2)

$$j_{\overline{x}} f(x) := \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(\overline{x})}{k!}(x - \overline{x})^k$$

*heißt **∞-Jet** (oder **Taylorreihe**) von f in $\overline{x}$.*

(3) *$j_{\overline{x}} f$ stellt f auf X dar $:\Leftrightarrow j_{\overline{x}} f \to f$ auf X punktweise.*

EX:

[1]

$$f(x) := \begin{cases} \emptyset & x = 0 \\ exp(-\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \end{cases}$$

$j_0 f = 0$; $j_0 f$ stellt f nur in 0 dar.

[2] $x \to \arctan(x)$ ist ∞-oft differenzierbar,

$$\begin{aligned} j_0 \arctan(x) &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1 \\ &= \arctan(x), \end{aligned}$$

d.h. der jet stellt arctan auf $|x| \leq 1$ dar.

Bemerkung 4.1.16. *:*
Es gibt ein $R \geq 0$, so dass $j_{\overline{x}} f$ lokal gleichmäßig konvergiert in $|x - \overline{x}| < R$, und in $|x - \overline{x}| > R$ divergiert.
Potenzreihen $A(x) := \sum_{n \geq 0} a_n (x - \overline{x})^n$ stimmen mit ihrem Jet $j_{\overline{x}} A = A$ überein.

Satz 4.1.17. *:*

äq

(i) $j_{\overline{x}} f(x) \to f(x)$

(ii) $R_n(x) \to 0$.

Beweis : $|j^n_{\overline{x}} f(x) - f(x)| = |R_n(x)|$. □

Folgerung 4.1.18. *:*

$\overline{x} \in [a, b] \subset I$, A, $B > 0$ *so dass*

$$\|f^{(n)}|_{[a,b]}\| = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \leq A \cdot B^n.$$

Dann konvergiert $j_{\overline{x}}\big|_{[a,b]}$ gleichmäßig gegen $f\big|_{[a,b]}$.

Beweis :
Für $x \in [a, b]$ ist

$$\begin{aligned} |j^n_{\overline{x}} f(x) - f(x)| &= |R_{n+1}(x)| \\ &= \frac{1}{n!} \Big| \int_{\overline{x}}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \Big| \\ &\leq \frac{1}{n!} (b - a)^n A \cdot B^{n+1} \end{aligned}$$

d.h.

$$\left\| \left(j_{\overline{x}}^{n} f - f\right)\Big|_{[a,b]} \right\| \leq A \cdot B \cdot \frac{(b-a)^n . B^n}{n!}$$

Da $\exp\left((b-a) \cdot B\right)$ konvergiert, ist $\frac{(b-a)^n B^n}{n!}$ eine Nullfolge. $\square$

4.2 Elementare Funktionen: $(1+x)^\alpha$

Für natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$ ist bekanntlich der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Die rechte Seite erlaubt folgende Verallgemeinerung für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & k>0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\binom{\alpha}{k} = 0$ genau dann, wenn $\alpha = m$ für eine natürliche Zahl $0 \leq m \leq k-1$.

Satz 4.2.0. *:*
Die Potenzreihe

$$\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$$

konvergiert für $|x| < 1$, und es gilt

$$\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha, \ |x| < 1$$

Zusatz: Ist $\alpha > 0$, so konvergiert
$\sum\limits_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n}$ *absolut,*
$\sum n \geq 0 \binom{\alpha}{n} x^n$ *absolut und gleichmäßig in $|x| \leq 1$*
und es gilt

$$\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha, \ |x| \leq 1, \ \alpha > 0$$

Der Identitätssatz für Potenzreihen liefert

Folgerung 4.2.1. *:*

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{j+k=n} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{k}$$

EX:

$$\sqrt[3]{2} = (1+1)^{\frac{1}{3}} = \sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{3}}{n}.$$

Beweis des Satzes:
Œ $\alpha \notin \mathbb{R}$, da in diesem Fall fast alle Binomialkoeffizienten verschwinden. Ist $\alpha \notin \mathbb{N}$, so ist $\binom{\alpha}{n} \neq 0$, und nach QK ist für $0 < |x| < 1$

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n} \right| = \frac{|\alpha - n|}{n+1} |x| \longrightarrow |x| < 1$$

d.h.

$$\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n \text{ konvergiert absolut in } |x|<1.$$

Ist $\alpha > 0$, $a_n := \left|\binom{\alpha}{n}\right|$, so ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-\alpha}{n+1} \text{ für } n \geq [\alpha]+1.$$

Für diese n ist

$$na_n - (n+1)a_{n+1} = \alpha \cdot a_n > 0$$

d.h. $(n \cdot a_n)$ ist schließlich monoton fallend. Deshalb existiert

$$\gamma := \lim n \cdot a_n$$

und $\gamma \geq 0$.
Die k-te Partialsumme der Reihe $\sum\limits_{n\geq 0}(na_n - (n+1)a_{n+1})$ ist $-(k+1)a_{k+1}$. Daher konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0}(na_n - (n+1)a_{n+1})$, und damit wegen

$$a_n = \frac{1}{\alpha}(na_n - (n+1)a_{n+1})$$

die Reihe

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n\geq 0}\left|\binom{\alpha}{n}\right|.$$

Wegen $\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right| \leq \left|\binom{\alpha}{n}\right|$ für $|x| \leq 1$, konvergiert für $\alpha > 0$ die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$ absolut und gleichmäßig in dem Intervall $[-1,1]$.
Schließlich sei für $\alpha \in \mathbb{R}$, $|x|<1$

$$f_\alpha(x) = \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n,$$

also

$$f'_\alpha(x) = \sum_{n\geq 1} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \alpha \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha-1}{n}x^n = \alpha \cdot f_{\alpha-1}(x),$$

da $(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \alpha\binom{\alpha-1}{n}$. Mittels der Rekursionsformel

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}, \quad n \geq 1$$

und einer direkten Rechnung folgt

$$(1+x)f_{\alpha-1}(x) = f_\alpha(x)$$

oder

$$(1+x)f'_\alpha(x) = \alpha\ f_\alpha(x),\ |x|<1,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

d.h. f_α erfüllt die DGL

$$\frac{d}{dx}\left(f_\alpha(x)\cdot(1+x)^{-\alpha}\right)=0$$

Daher ist $f_\alpha(x)=const(1+x)^\alpha$, und schließlich wegen $f_\alpha(0)=1$

$$f_\alpha(x)=(1+x)^\alpha,\ |x|<1,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Für $\alpha>0$ gilt sogar

$$f_\alpha(x)=(1+x)^\alpha \text{ für } |x|\le 1$$

nach dem Abelschen Grenzwertsatz.
Beachte: $(-1,1]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto(1+x)^\alpha=\exp(\alpha\log(1+x))$, hat eine stetige Fortsetzung nach -1 für $\alpha>0$. □

Folgerung 4.2.2. ***(Approximationssatz von Weierstrass)***
Es gibt eine Folge (p_m) von Polynomen, die auf $[-1,1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $x\mapsto|x|$ konvergiert.

Insbesondere ist also die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge differenzierbarer Funktioen im allgemeinen nicht differenzierbar.

Beweis :

$$|x|=(1-(1-x^2))^{\frac{1}{2}}=\sum_{n\ge0}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n(1-x^2)^n.$$

Die Partialsummen sind Polynome, die auf $[-1,1]$ gleichmäßig gegen die Abbildung

$$x\longmapsto|x|$$

konvergieren. □

ENDE der Vorlesung Analysis I