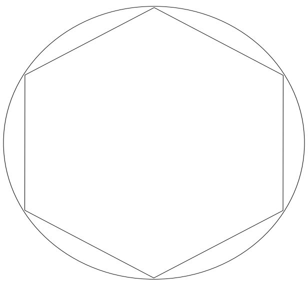
Kapitel 1

Konvergente Folgen

1.0 Reelle Folgen und Reihen

Motivation: Ein einem Kreis K einbeschriebenes (regelmäßiges) n-Eck E_n 19/11/99



n=6

approximiert die Fläche des Kreises:

$$\text{Fläche } (E_n) \approx \text{ Fläche}(K) \text{ falls } n \gg 0.$$

Die mathematisch präzise Fassung solcher oder ähnlicher Approximationsprozesse führt zum Begriff der KONVERGENZ - dem zentralen Begriff der Analysis.

Definition 1.0.0 $x \in \mathbb{R}$. *Dann heißt*

$$|x| := \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

der (Absolut)betrag von x.

Offenbar ist

(1) $-|x| \leq x \leq |x|$

(2) $|x|^2 = x^2$, *d.h.* $|x| = \sqrt{x^2}$

Satz 1.0.1 *Die Abbildung*

$$|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|,$$

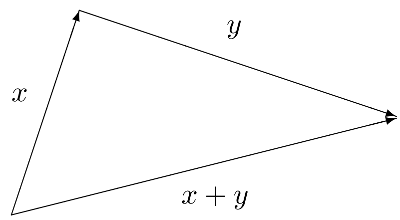
hat folgende Eigenschaften

N1: $|x| \geq 0, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

N3: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

$N3$ ist die sogenannte Δ - Ungleichung („Dreiecksungleichung“).



Grob gesprochen ist die Analysis die Theorie der Δ - Ungleichung.

Beweis :

N1: $|x| = \sqrt{x^2}$.

N2: Œ $x \cdot y \neq 0$. Ist $x \cdot y > 0$ so ist $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.
Ist $x \cdot y < 0$ so ist $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

N3: $|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2+2\cdot x\cdot y+y^2 \leq |x|^2+2|x|\cdot|y|+|y|^2 = (|x|+|y|)^2$.
Da das $\sqrt{\ }$ -ziehen monoton ist, folgt $|x + y| \leq |x| + |y|$.

$\square$

Folgerung 1.0.2

(1) $|0| = 0,\ |1| = 1$

(2) $|-x| = |x|$

(3) $\Big||x|\Big| = |x|$

(4) $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$ *falls* $x \neq 0$

(5) $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$

(6) $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$

Die Eigenschaft (6) ist die sogenannte „verschärfte Δ -Ungleichung“ ; ihr Beweis beruht auf dem „Fundamentaltrick“ der Analysis:

$|x| = |x + (y - y)| = |(x + y) + (-y)| \leq |x + y| + |y|$, d.h.$|x| - |y| \leq |x + y|$

In dem man x und y vertauscht, findet man

$$|y| - |x| \leq |y + x|$$

also

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x + y|.$$

Indem man y durch $-y$ ersetzt, folgt

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

Mit Hilfe des Absolutbetrages kann man den „Abstand“ zweier reeller Zahlen messen:

Satz 1.0.3 *Die „Abstandsfunktion“*

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y) := |x - y|$$

hat folgende Eigenschaften:

M1: $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2: $d(x, y) = d(y, x)$

M3: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Außerdem ist sie translationsinvariant, d.h.

$$d(x + a, y + a) = d(x, y) \text{ für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Definition 1.0.4 *X Menge,* $\alpha : \mathbb{N} \to X$.
Dann heißt α eine $X-Folge$ mit dem n-ten Folgeglied $\alpha_n := \alpha(n)$.

Ist $X = \mathbb{R}$ so spricht man von einer reellen Folge. Häufig werden Folgen auch als (unendliche) Tupel geschrieben:

$$\alpha = (\alpha_n) = (\alpha_n)_{n \geq 0}.$$

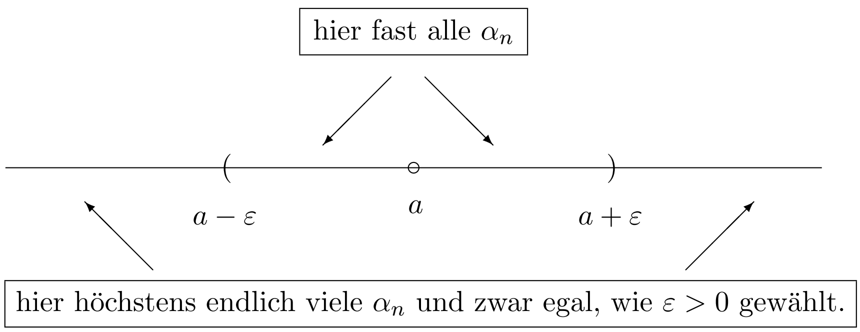
WARNUNG: $Folge \neq \{Folgenglieder\}$.
$\alpha = \mathbb{N} \times \{1\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ aber $\{\alpha_n | n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$.

Definition 1.0.5 $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *reelle Folge,* $a \in \mathbb{R}$.
a Grenzwert von α *(* α *konvergiert gegen a)* $:\Leftrightarrow$ *Zu jedem* $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ *gibt es ein* $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *so dass der Abstand* $|\alpha_n - a| < \varepsilon$ *sofern* $n \geq N_\varepsilon$.

Konvergenz bedeutet nicht, dass irgendein Folgeglied α_n mit dem Grenzwert a übereinstimmen muss.
Konvergenz bedeutet, dass in dem offenen Intervall

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

egal wie $\varepsilon > 0$ gewählt ist, fast alle[1] Folgenglieder liegen, außerhalb aber höchstens endlich viele.



Lemma 1.0.6 *Eine reelle Folge* $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *hat höchstens einen Grenzwert a. Man schreibt dann*

$$a = \lim\ \alpha_n \textit{ oder } \alpha_n \to a.$$

[HS] $x \in \mathbb{R}$ so dass $|x| \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Dann ist $x = 0$.

Beweis des Lemmas: a, a' Grenzwerte, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N, N' \in \mathbb{N}$ so dass

$$|\alpha_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \textit{ sofern } n \geq N$$

$$|\alpha_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} \textit{ sofern } n \geq N'$$

[1] =alle bis auf endlich viele Ausnahmen

Für $n \geq N + N'$ ist dann

$$|a - a'| = |a - \alpha_n + \alpha_n - a'| \leq |a - \alpha_n| + |\alpha_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h. $a = a'$ nach **[HS]**. □

EX: 23/11/99

[1] Für $\alpha_n := const. = c \in \mathbb{R}$ gilt $\lim \alpha_n = c$.

[2] Für $A \in \mathbb{R}$,$\alpha_n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{A}{n} & n > 0 \end{cases}$, gilt $\lim\ \alpha_n = 0$.

Beweis :

$$|\alpha_n - 0| = \left|\frac{A}{n}\right| \leq \frac{|A|}{n} \text{ für } n \geq 1.$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert nach Archimedes ein $N \in \mathbb{N}_+$ so dass

$$\frac{|A|}{\varepsilon} < N,$$

d.h. $n \geq N \geq 1$ impliziert

$$|\alpha_n - 0| \leq \frac{|A|}{n} < \varepsilon,$$

also $\alpha_n \to 0$. □

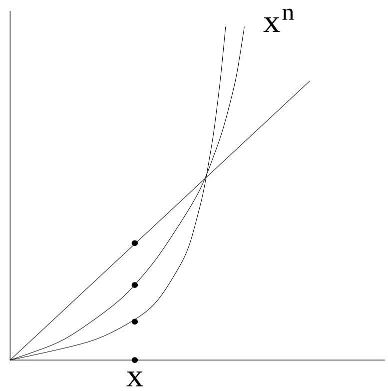
KRITERIUM:

$\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}, c \geq 0$ so dass

$$|\beta_n - b| \leq \frac{c}{n} \text{ für fast alle n.}$$

Dann ist $b = \lim \beta_n$.

[3] Für $|x| < 1, \alpha_n := x^n$ gilt $\lim\ x^n = 0$



Beweis : Œ $x \neq 0$. $|x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} = 1 + h, h > 0$. Nach Bernoulli ist

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n}$$

für $n \geq 1$, also $\lim x^n = 0$ nach dem Kriterium. $\square$

[4] $\alpha_n := 1 + (-1)^n$ konvergiert nicht[2].

Beweis : Angenommen $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert von α_n. Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es dann ein N so dass

$$|\alpha_n - a| < \frac{1}{2} \text{ sofern } n \geq N.$$

Ist $n \geq N,\ n$ gerade, so ist $|\alpha_n - a| = |2 - a| < \frac{1}{2}$, d.h. $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$, ist dagegen $n \geq N,\ n$ ungerade, so ist $|\alpha_n - a| = |0 - a| < \frac{1}{2}$, d.h. $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, ein Widerspruch. $\square$

[5] Für $x > 0,\ \alpha_n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \sqrt[n]{x} & n > 0 \end{cases}$, gilt $\lim \alpha_n = 1$.

Beweis : Sei $x \geq 1 :\ \sqrt[n]{x} = 1 + h_n, h_n \geq 0$ geeignet.

Bernoulli: $x \geq 1 + n \cdot h_n$, d.h. $h_n \leq \frac{x-1}{n}, n \geq 1$. Damit $|\sqrt[n]{x} - 1| = h_n \leq \frac{x-1}{n}$ für $n \geq 1$ also $\lim \sqrt[n]{x} = 1$ nach Kriterium.

Sei $0 < x < 1 :\quad \sqrt[n]{x} = \frac{1}{1+h_n},\quad h_n$geeignet.

Bernoulli: $h_n \leq \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1}{n}$ Damit

$$\left|\sqrt[n]{x} - 1\right| = \left|\frac{1}{1+h_n} - 1\right| = \frac{h_n}{1+h_n} \leq h_n \leq \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1}{n},\ n \geq 1$$

also $\lim \sqrt[n]{x} = 1$ nach Kriterium. $\square$

[6] Für $\alpha_n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \sqrt[n]{n} & n > 0 \end{cases}$, gilt $\lim\ \alpha_n = 1$

Beweis : $\alpha_n = 1 + h_n,\ h_n \geq 0$

Bernoulli-Trick versagt.

$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + \binom{n}{1} h_n + \binom{n}{2} h_n^2 \geq \binom{n}{2} h_n^2$$

d.h.

$$h_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \leq \frac{3}{n} \text{ für } n \geq 3.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Archimedes ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{3}{\varepsilon^2} < N$

Für $n \geq N + 3$ ist dann $|\alpha_n - 1| = h_n \leq \sqrt{\frac{3}{n}} < \varepsilon$, d.h. $\alpha_n \to 1$. $\square$

Satz 1.0.7 *:* $|x| < 1,\ s_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.
Dann ist $\lim\ s_n(x) = \frac{1}{1-x}$.

Beweis :

$$s_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

also

$$\left|s_n(x) - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \leq \frac{1}{|1-x|} \cdot |x^n| \leq \frac{const}{n} \text{ für } n \geq 1 \text{ nach } \textbf{EX} \text{ [3].}$$

$\square$

[2]=divergiert

Bemerkung 1.0.8 *: Die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Folgen*

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

ist auf natürliche Weise eine $\mathbb{R}$-Algebra mit $\mathbb{1}$, d.h. ist $\mathbb{1}$ die konstante Folge $\mathbb{1}_n = 1$, $(\alpha_n), (\beta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{R}$ so ist

$$(\alpha_n) \dot{\pm} (\beta_n) := (\alpha_n \dot{\pm} \beta_n)$$

$$\lambda \cdot (\alpha_n) := (\lambda \cdot \alpha_n)$$

$$(\mathbb{1}_n)(\alpha_n) = (\alpha_n)$$

wieder eine reelle Folge. Überdies ist $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ partiell geordnet :

$$(\alpha_n) \leq (\beta_n) :\Leftrightarrow \alpha_n \leq \beta_n \text{ für alle } n$$

und mit (α_n) gehört auch die Folge der Beträge

$$|(\alpha_n)| := (|\alpha_n|)$$

zu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Stabilitätseigenschaften („Die Glorreichen 8")

(1) (α_n) konvergent $\Rightarrow$ Es gibt ein $C \geq 0$ so dass $|\alpha_n| \leq C$ für alle n.

(2) $\alpha_n \to a,\ \alpha_n = \beta_n$ für fast alle $n \Rightarrow \beta_n \to a$.

(3) $\alpha_n \to a,\ \beta_n \to b, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_n \dot{\pm} \beta_n \to a \dot{\pm} b,\ \lambda\alpha_n \to \lambda a$.

(4) $\alpha_n \to a,\ \beta_n \to b, b \neq 0, \beta_n \neq 0$ für alle $n \Rightarrow \frac{\alpha_n}{\beta_n} \to \frac{a}{b}$.

(5) $\alpha_n \to a \Rightarrow |\alpha_n| \to |a|$.

(6) $\alpha_n \to a,\ a \neq 0 \Rightarrow$ Es gibt ein $C > 0$ so dass $|\alpha_n| \geq C$ für fast alle n.

(7) $\alpha_n \to a,\ \beta_n \to b, \alpha_n \leq \beta_n$ für fast alle $n \Rightarrow a \leq b$.

(8) $\alpha_n \leq \gamma_n \leq \beta_n$ für fast alle n, $\alpha_n \to a,\ \beta_n \to a \Rightarrow \gamma_n \to a$.

Beweis der Stabilitätseigenschaften:

(1): $\alpha_n \to a$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $|\alpha_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Für diese n ist dann

$$|\alpha_n| = |\alpha_n - a + a| < 1 + |a|, \text{ also}$$

$$|\alpha_n| \leq C := max\{1 + |a|, |\alpha_0|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_N|\}$$

für alle n.
(2): Zunächst gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$ so dass $\alpha_n = \beta_n$ für alle $n \geq N'$. Da $\alpha_n \to a$ gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein N so dass $|\alpha_n - a| < \varepsilon$ sofern $n \geq N$, also $|\beta_n - a| < \varepsilon$ sofern $n \geq max\{N, N'\}$.
(3): Exemplarisch: $\alpha_n \cdot \beta_n \to a \cdot b$
$|\alpha_n \cdot \beta_n - a \cdot b| = |\alpha_n \beta_n - \beta_n a + \beta_n a - ab| \leq |\beta_n||\alpha_n - a| + |a||\beta_n - b|$.
Nach (1) gibt es ein $C \geq 0$ so dass $|\beta_n| \leq C$ für alle $n \geq 0$, also
$|\alpha_n \cdot \beta_n - a \cdot b| \leq A(|\alpha_n - a| + |\beta_n - b|)$ wobei $max\{C, |a|\} = A$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nun $N, N' \in \mathbb{N}$ so dass

$$|\alpha_n - a| < \frac{\varepsilon}{2A+1}, \quad n \geq N$$

$$|\beta_n - b| < \frac{\varepsilon}{2A+1}, \quad n \geq N'$$

also

$$|\alpha_n \cdot \beta_n - a \cdot b| < \varepsilon \text{ sofern } n \geq max\{N, N'\}.$$

(5): $||\alpha_n| - |a|| \leq |\alpha_n - a|$
(6): Zu $\varepsilon := \frac{1}{2}|a|$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|\alpha_n - a| < \frac{1}{2}|a|$ für alle $n \geq N$, also für $n \geq N$

$$\Big||\alpha_n| - |a|\Big| \leq |\alpha_n - a| < \frac{1}{2}|a|.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$-\frac{1}{2}|a| < |\alpha_n| - |a| < \frac{1}{2}|a|$$

d.h.

$$|\alpha_n| > C := \frac{1}{2}|a| \text{ für alle } n \geq N.$$

(7): Sei $\gamma_n := \beta_n - \alpha_n,\ c := b - a$. Es gilt $\gamma_n \geq 0$ für n $\geq N', \gamma_n \to c$. Angenommen $c < 0$. Dann gibt es zu $\varepsilon := \frac{1}{2}|c|$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass
$|\gamma_n - c| < \frac{1}{2}|c|$ für alle $n \geq N$, also

$$-\frac{1}{2}|c| < \gamma_n - c < \frac{1}{2}|c|$$

und damit

$$\gamma_n < c + \frac{1}{2}|c| = \frac{1}{2}c < 0,$$

ein Widerspruch.
(8): $\alpha_n - a \leq \gamma_n - a \leq \beta_n - a$, insbesondere $-|\alpha_n - a| \leq \gamma_n - a \leq |\beta_n - a|$, also $|\gamma_n - a| \leq max\{|\beta_n - a|, |\alpha_n - a|\} < \varepsilon$ für $n \geq N$ (siehe (2)).
(4): $|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{a}{b}| = \frac{1}{|\beta_n||b|}|\alpha_n \cdot b - a \cdot b + a \cdot b - a \cdot \beta_n| \leq \frac{1}{|\beta_n|}|\alpha_n - a| + \frac{|a|}{|\beta_n||b|}|\beta_n - b|$.
Da $b \neq 0$, gibt es ein $C \geq 0, \quad N' \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{1}{|\beta_n|}, \frac{|a|}{|\beta_n||b|} \leq C \text{ für alle } n \geq N'$$

also

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{a}{b}\right| \leq C|\alpha_n - a| + C|\beta_n - b| \text{ für alle } n \geq N'.$$

Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq max\{N, N'\}$$

(vgl.(3)). □

WARNUNG: $\alpha_n \to a, \alpha_n > 0 \overset{i.a.}{\not\Rightarrow} a > 0$ (sondern nur $a \geq 0$).

$$\alpha_n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{1}{n} & n \geq 1 \end{cases}.$$

$\alpha_n > 0$ aber $\lim\ \alpha_n = 0$.

EX:

[1]

$$\alpha_n := \frac{n}{n^2+1}.$$

Weder die Folge im Zähler noch die im Nenner konvergiert, aber für $n \geq 1$ ist

$$\alpha_n = \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to \frac{0}{1} = 0.$$

[2] $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \vee y := max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$x \wedge y := min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

$\alpha_n \to a, \beta_n \to b \Rightarrow \alpha_n \overset{\wedge}{\vee} \beta_n \to a \overset{\wedge}{\vee} \beta$

Aufgrund der Stabilitätseigenschaften des Konvergenzbegriffes ist die Menge

$$\mathcal{F}_{konv} := \{\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \alpha\ konvergent\}$$

auf natürliche Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (vgl. VL $\ll$ Lineare Algebra $\gg$) und die Limesbildung $\alpha \mapsto \lim \alpha_n$ eine lineare Abbildung

$$\lim : \mathcal{F}_{konv} \to \mathbb{R}$$

Der „kern" dieser Abbildung

$$kern(\lim) := \{\alpha \in \mathcal{F}_{konv} \mid \lim\ \alpha_n = 0\}$$

ist gerade der Untervektorraum der NULLFOLGEN.

Definition 1.0.9

$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

(1) α *beschränkt* $:\Leftrightarrow \{\alpha_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ *beschränkt, d.h. es existiert ein* $c \geq 0$ *so dass* $|\alpha_n| \ \leq c$ *für alle* n.

(2) α *monoton steigend (fallend)* $:\Leftrightarrow \alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ *für fast alle* n *(* $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ *für fast alle* n*)*

Monoton steigende Folgen werden mit $\alpha \nearrow$, monoton fallende Folgen mit $\alpha \searrow$ bezeichnet. 24/11/99

Theorem 1.0.10 $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *monoton und beschränkt. Dann hat* α *einen Grenzwert und es gilt:*

$$\lim \alpha_n := \begin{cases} \sup \alpha_n & \alpha \nearrow \\ \inf \alpha_n & \alpha \searrow \end{cases} .$$

EX:

[1] Eulersche Zahl $e = 2,718281...$

$$e_n := \begin{cases} 2 & n = 0 \\ (1 + \frac{1}{n})^n & n \geq 1 \end{cases}$$

$$e'_n := \begin{cases} 4 & n = 0 \\ (1 + \frac{1}{n})^{n+1} & n \geq 1 \end{cases}$$

klar: $2 \leq e_n \leq e'_n \leq 4$ für alle n.

$$\begin{aligned} e_n \nearrow: \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{(n+1)^3} \\ &> 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_n \searrow: \frac{e'_{n-1}}{e'_n} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{(n^2-1)}\right)^n \\ &> \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

also

$$2 = e_0 \le e_1 < e_2 < ... < e_n < e'_n < e'_{n-1} ... < e'_1 = e'_0 = 4$$

$$2 \le \lim\ e_n = \sup\ e_n \le 4$$

$$2 \le \lim\ e'_n = \inf\ e'_n \le 4$$

$$e'_n = e_n + \frac{e_n}{n} \Rightarrow 2 \le e := \lim\ e_n = \lim\ e'_n \le 4.$$

[2] Natürlicher Logarithmus,
$x > 0$
$\lambda_n(x) := \begin{cases} x - 1 & n = 0 \\ n\,(\sqrt[n]{x} - 1) & n > 0 \end{cases}$

(1) $\lambda_n\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\sqrt[n]{x}} \cdot \lambda_n(x),\ n > 0$

(2) $\lambda_n(x \cdot y) = \lambda_n(x) + \lambda_n(y) + \frac{1}{n}\lambda_n(x) \cdot \lambda_n(y)$

(3) $\lambda_n(x) < \lambda_n(y)\ falls\ x < y$

(4) $\lambda_n(1) = 0$

Ⓢ Die reelle Folge $(\lambda_n(x))$ konvergiert für jedes $x > 0$.

$\log\ :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log\ x := \lim\ \lambda_n(x)$ ist der sogenannte natürliche Logarithmus.

Beweis : Da $\sqrt[n]{x} \to 1$, Œ $x > 1$.
Für diese x ist $\lambda_n(x) \ge 0$.

$$\begin{aligned}
\lambda_n - \lambda_{n-1} &= n(y^{n+1} - 1) - (n+1)(y^n - 1),\ x = y^{n(n+1)},\ y > 1. \\
&= n \cdot y^n \cdot (y - 1) - (y^n - 1) \\
&= n \cdot y^n \cdot (y - 1) - (y - 1)(y^{n-1} + y^{n-2} + .. + 1) \\
&= (y - 1)\left[(y^n - y^{n-1}) + (y^n - y^{n-2}) + .. + (y^n - 1)\right] > 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $\lambda_n \ge \lambda_{n+1} \ge 0$, also existiert

$$\lim \lambda_n(x) = \inf \lambda_n(x)$$

□

Theorem 1.0.11 *Der natürliche Logarithmus*

$$\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lim \lambda_n(x),$$

hat folgende Eigenschaften:

L1 $\log\ x \cdot y = \log\ x + \log\ y$

L2 $\log\ x < \log\ y$ *für* $x < y$

L3 $\log\ e = 1, \quad \log\ 1 = 0$

L4 $1 - \frac{1}{x} \leq \log\ x \leq x - 1$

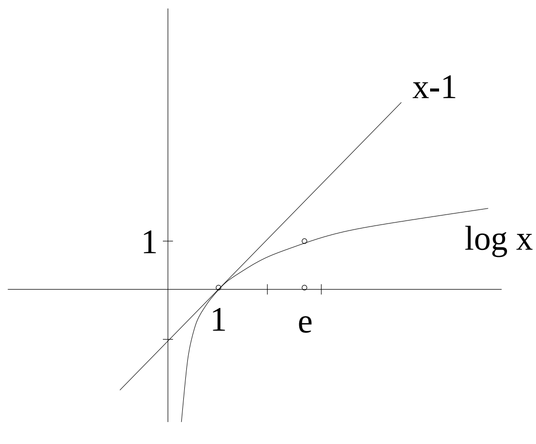
Folgerung 1.0.12
$\log\ \frac{1}{x} = -\log\ x$
$\log\ x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \log\ x$ *für alle* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
$x \mapsto \log\ x$ *injektiv.*

Folgerung 1.0.13 $\log : (\mathbb{R}_x, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ *Homomorphismus von abelschen Gruppen.*

Später: log ist sogar ein Isomorphismus.

Beweis des Theorems:

L1: $\lambda_n(x \cdot y) = \lambda_n(x) + \lambda_n(y) + \frac{1}{n}\lambda_n(x) \cdot \lambda_n(y)$
L2: $x < y \Rightarrow y = A \cdot x,\ A > 1,\ \log\ A > 0.$
L3: $e_n \leq e \leq e'_n \Rightarrow$
$\frac{n}{n+1} \leq n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \log\ e \leq (n+1) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{n+1}{n}$
L4: $\frac{\lambda_n}{n} = \sqrt[n]{x} - 1 > -1 \Rightarrow x \geq 1 + \lambda_n$
$\log\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \log\ x \geq 1 - \frac{1}{x}.$ □



Definition 1.0.14 $\alpha, \alpha' : \mathbb{N} \to X$ *Folgen.*
α' *Teilfolge von* $\alpha :\Leftrightarrow$ *Es gibt eine streng monoton steigende Folge* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *natürlicher Zahlen, so dass*

$$\alpha' = \alpha \circ \varphi,$$

mit anderen Worten $\alpha'_n = \alpha_{\varphi(n)}$.
Ist $\varphi \neq id$ *so heißt* α' *eine echte Teilfolge von* α.

Satz 1.0.15 $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *reelle Folge*

äq

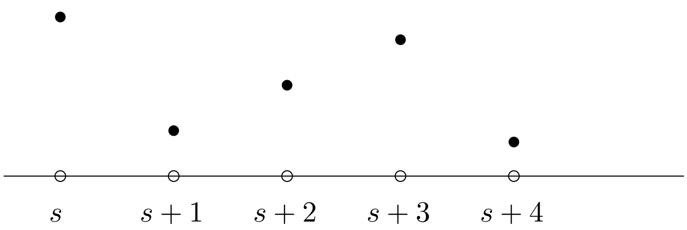
(i) α *konvergent*

(ii) Jede echte Teilfolge von α *ist konvergent und sämtliche Grenzwerte dieser Teilfolgen stimmen überein.*

Theorem 1.0.16 *(Satz von Bolzano*[3]*-Weierstraß* [4]*)*
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

[**HS**] Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweis des HS: 30/11/99
$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, s \in \mathbb{N}$.
s Spitze von $\alpha :\Leftrightarrow \alpha_n \leq \alpha_s$ für alle $n \geq s$.
$S := \{s \in \mathbb{N} \mid s \textit{ Spitze von } \alpha\}$.



Ist S unendlich, so gibt es Spitzen

$$\begin{aligned} & s_0 < s_1 < s_2 < s_3 < .. < s_k < .. \\ \text{also} \quad & \alpha_{s_0} \geq \alpha_{s_1} \geq \alpha_{s_2} \geq \alpha_{s_3} \geq .. \end{aligned}$$

und $(\alpha_{s_k})_{k \geq 0}$ ist eine monoton fallende Teilfolge von (α_n).
Ist S dagegen endlich, definiere

$$n_0 := \begin{cases} 0 & S = \emptyset \\ \max S + 1 & S \neq \emptyset \end{cases}$$

Dann gibt es ein $n_1 \geq n_0$ so dass $\alpha_{n_1} > \alpha_{n_0}$, insbesondere $n_1 > n_0$.
n_1 ist ebenfalls keine Spitze, daher gibt es ein $n_2 \geq n_1$ so dass $\alpha_{n_2} > \alpha_{n_1}$, insbesondere $n_2 > n_1$. Nach Induktion existieren

[3]Bernhard Bolzano (1781-1848), ital. Mathematiker
[4]Karl Weierstraß (1815-1897), deutscher Mathematiker

$$n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < .. < n_k < ..$$

so dass

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_1} < \alpha_{n_2} < ..$$

d.h. $(\alpha_{n_k})_{k\geq 0}$ ist eine (streng) monoton steigende Teilfolge von (α_n). □

Definition 1.0.17 *$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reelle Folge.*
α Cauchy[5]-Folge :$\Leftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$.

Lemma 1.0.18

(1) Jede CF ist beschränkt.

(2) Jede konvergente Folge ist eine CF.

WARNUNG:

Selbst wenn der Abstand zweier aufeinander folgender Folgenglieder beliebig klein wird, ist die Folge im allgemeinen keine Cauchy-Folge:
$s_0 := 0, s_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{n}, n \geq 1.$
$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1}$
$n \leq 2^k < 2^{k+1} \leq m$
$s_m - s_n \geq \frac{1}{2^k+1} + .. + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{2^{k+1}-2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$

Theorem 1.0.19 *$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reelle Folge*

äq

(i) α konvergent

(ii) α Cauchy-Folge.

Beweis : $(i) \to (ii)$: 1.0.18
$(ii) \to (i)$: Nach 1.0.19 ist (α_n) beschränkt und besitzt deshalb eine konvergente Teilfolge $\alpha_{n_k} \to \overline{\alpha}$.

$$|\alpha_n - \overline{\alpha}| \leq |\alpha_n - \alpha_{n_k}| + |\alpha_{n_k} - \overline{\alpha}|.$$

Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \geq 0$ sodass

$$|\alpha_{n_k} - \overline{\alpha}| < \frac{\epsilon}{2},\ k \geq N$$

[5]Auguste Cauchy (1789-1857), franz. Mathematiker

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \frac{\epsilon}{2},\ n, m \geq N$$

Für $k \geq N$ ist $n_k \geq N$, also

$$|\alpha_n - \overline{\alpha}| < \epsilon \text{ für } n \geq N.$$

□

Bemerkung 1.0.20 *Eine rationale Cauchy-Folge $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ hat i.a. keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$:*

$$\frac{1}{n}\left[n \cdot \sqrt{2}\right] \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

EX:

[1] Goldene Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
$x_0 := 1, x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, n \geq 0$
Induktion:

(1) $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 2$ für $x \geq 1$.

(2) $|x_{n+k} - x_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |x_n - x_0| \leq 4 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$

(x_n) ist damit CF, $x := \lim x_n,\ x = 1 + \frac{1}{x}$ oder $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
Da $x_n \geq \frac{3}{2}$ ist auch $x \geq \frac{3}{2}$, d.h. $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

[2] Allgemeine Potenz
$a > 0,\ 0 \neq q \in \mathbb{Z},\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$a^{\frac{1}{q}} := \begin{cases} \sqrt[q]{a} & q > 0 \\ \frac{1}{\sqrt[q]{a}} & q < 0 \end{cases}$$

$a^{\frac{p}{q}} := (a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$.

Eigenschaften: $r,\ s \in \mathbb{Q},\ a, b > 0$

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

(2) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

(3) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

(4) Für $r < s$ ist
$a^r < a^s$ falls $a > 1$
$a^r > a^s$ falls $a < 1$

(5) Für $1 < a$ ist $|a^r - a^s| \leq a^{max\{r,s\}}\left(a^{|r-s|} - 1\right)$.

[HS] Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es rationale Folgen $x_n \nearrow x$ und $x'_n \searrow x$.

Beweis : $\frac{1}{n}[nx] \leq x < \frac{1}{n}[nx] + \frac{1}{n}$. $\square$

Die beiden äußeren Folgen besitzen monotone Teilfolgen, die notwendigerweise monoton steigend bzw. monoton fallend gegen x konvergieren.

Ⓢ $a > 0,\ x \in \mathbb{R},\ x_n,\ x'_n \in \mathbb{Q}$ so dass

$$x_n \to x,\ x'_n \to x.$$

Dann sind (a^{x_n}) und $(a^{x'_n})$ Cauchy-Folgen und ihre Grenzwerte stimmen überein:

$$\lim\ a^{x_n} = \lim a^{x'_n}.$$

$$\text{Zusatz: } \lim\ a^{x_n} > 0.$$

Beweis : Œ $a > 1$. Dann existiert ein $M \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n|,\ |x'_n| \leq M$ für alle n, insbesondere

$$\left|a^{x_n} - a^{x'_m}\right| \leq a^M \left(a^{|x_n - x'_m|} - 1\right),\ n \in \mathbb{N}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $p \in \mathbb{N}_+$ so dass $|a^{\frac{1}{p}} - 1| = \sqrt[p]{a} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^M}$.
Da $x_n \to x, x'_m \to x$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - x'_m| < \frac{1}{p}$ für alle $n, m \geq N$, d.h. $|a^{x_n} - a^{x'_m}| < \varepsilon,\ \ n,\ m \geq N$. Für $x_m = x'_m$ folgt, dass sowohl (a^{x_n}) als auch $(a^{x'_m})$ CF sind. $y := \lim a^{x_n}, y' := \lim a^{x'_m}$ existiert.

$$|y - y'| \leq |y - a^{x_n}| + |a^{x_n} - a^{x'_m}| + |a^{x'_m} - y| < 3 \cdot \varepsilon$$

$$\text{für } n, m \geq N_* \geq N \text{ geeignet, d.h. } y = y'.$$

Zusatz: $x \geq 0$. $x_n \geq x, x_n \to x, x_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{x_n} \geq 1$, also auch $\lim\ \ a^{x_n} \geq 1$.
$x < 0$. $y_n \leq x,\ y_n \to x,\ y_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{-y_n} \geq 1$, also $\lim\ a^{-y_n} \geq 1$ d.h. $\lim\ a^{y_n} = \frac{1}{\lim\ a^{-y_n}} > 0$. $\square$

Definition 1.0.21 *:* $a > 0, x \in \mathbb{R}$.

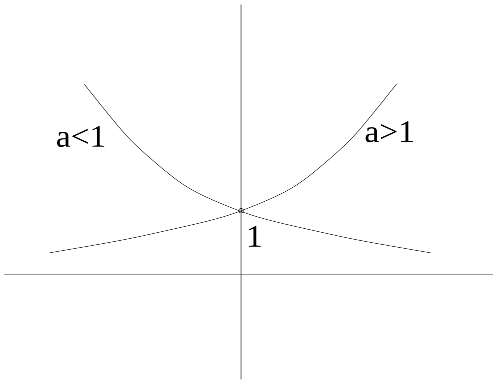
$$a^x := \lim\ \ a^{x_n},\ x_n \to x,\ x_n \in \mathbb{Q}.$$

Ⓢ Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto a^x$ hat folgende Eigenschaften:

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(2) $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$

(3) $a^x < a^y$ falls $x < y, 1 < a$
$a^x > a^y$ falls $x < y, 1 > a$.



Beweis :(1)-(2) Stabilität des Limes.
$a > 1 : y = x + h,\ h > 0$. Wähle $m \in \mathbb{N}_+, h_n \in \mathbb{Q}$ so dass $\frac{1}{m} \leq h_n < h,\ h_n \to h$. Dann ist $1 < \sqrt[m]{a} \leq a^{h_n}$, also $\lim a^{h_n} = a^h > 1$ und damit $a^y = a^x \cdot a^h > a^x$. □

Folgerung:

(1) $\log(e^x) = x, e^{\log y} = y$

(2) $a^x = e^{x \log a}$

(3) $(\mathbb{R}_+, \cdot) \overset{\log}{\to} (\mathbb{R}, +)$ Isomorphismus abelscher Gruppen.

Beweis : $x_n \leq x \leq x'_n,\quad x_n,\ x'_n \in \mathbb{Q},\quad x_n,\ x'_n \to x$. Dann ist für $a > 1$

$$a^{x_n} \leq a^x \leq a^{x'_n}$$

und damit

$$x_n \log a \leq \log a^x \leq x'_n \log a,$$

d.h. $x \cdot \log a = \log a^x$. Für $a = e$ folgt $x = \log e^x$. Da log injektiv, folgt aus $\log e^{\log y} = \log y,\quad y = e^{\log y}$. □

Theorem 1.0.22 *Es gibt genau eine Abbildung* $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *mit*

L1 $\lambda(x \cdot y) = \lambda(x) + \lambda(y)$

L2 $\lambda(x) < \lambda(y)$ *für* $x < y$

L3 $\lambda(e) = 1$

nämlich $\lambda = \log$.

[HS] $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

(1) $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$

(2) $\psi(x) \leq \psi(y)$ für $x \leq y$

Dann ist $\psi(x) = \psi(1) \cdot x, \psi(1) \geq 0$.

Beweis des Hilfssatzes: Nach (1) ist $\psi(2) = \psi(1) + \psi(1)$. Mit (2) folgt $0 \leq \psi(2) - \psi(1) = \psi(1) =: A$ und $\psi(2) = 2 \cdot A$.
Mit Induktion folgt $\psi(n) = n \cdot A$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$.

$$\begin{aligned}
& \psi(0) = \psi(0+0) \overset{(1)}{=} \psi(0) + \psi(0) \\
\Rightarrow\ & \psi(0) = 0 \\
\Rightarrow\ & 0 = \psi(0) = \psi(n + (-n)) = \psi(n) + \psi(-n) \\
\Rightarrow\ & \psi(-n) = -\psi(n) = -n \cdot A,\ n \in \mathbb{N}_+,
\end{aligned}$$

insgesamt $\psi(q) = q \cdot A$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad & \Rightarrow \quad p = q \cdot \frac{p}{q} = \sum_{n=1}^{q} \frac{p}{q} \\
& \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \psi(p) = \sum_{n=1}^{q} \psi\left(\frac{p}{q}\right) = q \cdot \psi\left(\frac{p}{q}\right) \\
& \Rightarrow \quad \psi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\psi(p)}{q} = \frac{p \cdot A}{q},
\end{aligned}$$

d.h. $\psi(x) = x \cdot A,\ x \in \mathbb{Q}$.
$x_n, x'_n \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R}$ s.d. $x_n \nearrow x, x'_n \searrow x$
$A \cdot x_n = \psi(x_n) \leq \psi(x) \leq \psi(x'_n) = A \cdot x'_n$, also $\psi(x) = \lim\ A \cdot x_n = \psi(1) \cdot x$.
$\square$

Beweis des Theorems:

(1) $x \mapsto \psi(x) := \lambda(e^x)$ genügt dem [HS] mit $\psi(1) = 1$, d.h. $\lambda(e^x) = x$, insbesondere

$$\lambda\left(e^{\lambda(x)}\right) = \lambda(x),$$

d.h. $e^{\lambda(x)} = x$, da λ injektiv. Beachte: $e^x > 0$ für alle x und daher ist $\lambda(e^x)$ definiert.
(2) Sowohl λ als auch log sind Umkehrabbildungen zu $x \mapsto e^x$, also $\lambda = \log$.
$\square$

Definition 1.0.23 *: $(a_n), (s_n)$ reelle Folgen*

(1) $((a_n),\ (s_n))$ unendliche Reihe mit n-tem Reihenglied a_n und n-ter Partialsumme $s_n :\Leftrightarrow s_n = a_0 + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ für alle n.

(2) $((a_n),\ (s_n))$ konvergiert: $\Leftrightarrow (s_n)$ konvergiert.

Üblicherweise wird sowohl die Reihe $((a_n),\ (s_n))$ als auch deren möglicher Grenzwert mit 3/12/99

$$\sum_{k\geq 0} a_k$$

bezeichnet, da die Folge der Partialsummen (s_n) die Reihe festlegt:
$a_n = s_n - s_{n-1}$.

EX:

[1] $|x| < 1$
Die geometrische Reihe

$$\sum_{n\geq 0} x^n$$

hat den Grenzwert

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

[2] Die harmonische Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

divergiert:

$$\begin{aligned} s_{2k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2}k\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \ldots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}\ . \end{aligned}$$

[3] Die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergiert gegen 1 („Teleskopsumme“):

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

[4] Die Zeta-Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$.

$$2^n - 1 = (1+1)^n - 1 \geq 1 + n - 1 \geq n$$

also

$$\zeta_n(s) \leq \zeta_{2^n-1}(s) = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{(n-1)s}} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^s}\right)$$
$$\leq \sum_{k\geq 0} 2^{(1-s)k} = \frac{1}{1 - 2^{(1-s)}}$$

Bemerkung:

(1) $k \in \mathbb{N}_+,\ \zeta(2k) = \pi^{2k} \cdot r_k, r_k \in \mathbb{Q}, z.B.\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

(2) $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$; ob $\zeta(5)$ rational oder irrational ist, ist unbekannt.

(3) Die ζ-Funktion ist wesentlich beim Beweis des Primzahlsatzes:

$$\#\{p \in \mathbb{N} \mid p \ \ prim\} \approx \frac{x}{\log x}.$$

Satz 1.0.24

äq

(i) $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ *konvergent*

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$ *so dass* $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ *für alle* $n,\ m \geq N,\ m \geq n$.

Folgerung 1.0.25

$$\sum_{k\geq 0} a_k \ konvergent \Rightarrow (a_n)\ Nullfolge.$$

Ist (a_n) *eine Nullfolge, so braucht* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *nicht notwendig zu konvergieren.*

Satz 1.0.26 (Leibniz[6])

$$a_n \searrow 0, a_n \geq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n \ konvergiert.$$

[6] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), deutscher Universalgelehrter

Beweis : Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Aus $a_k \geq a_{k+1}$ für alle k folgt

$$s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0,$$

also $(s_{2n}) \searrow$, analog $s_{2n+3} - s_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$, also $(s_{2n+1}) \nearrow$ außerdem $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n}$, also für alle n gilt

$$s_1 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_{2n+1} \ldots \leq s_{2n} \leq s_{2n-2} \leq \ldots \leq s_2 \leq s_0.$$

Da (s_{2n+1}) monoton wachsend und nach oben beschränkt (z.B. durch s_0) und (s_{2n}) monoton fallend und nach unten beschränkt (durch s_1), existieren $s = \lim s_{2n+1}$ und $s' = \lim s_{2n}$. Andererseits folgt mit STAB
$s = \lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} - \lim a_{2n+1} = s' - 0 = s$. Insgesamt folgt $s = \lim s_n$. $\square$

EX:

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n} \text{ konvergiert.}$$

Definition 1.0.27

$$\sum_{n\geq 0} a_n \textit{ konvergiert absolut } :\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} |a_n| \textit{ konvergiert.}$$

Lemma 1.0.28

$$\sum_{n\geq 0} a_n \textit{ konvergiert absolut} \overset{i.a}{\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}} \sum_{n\geq 0} a_n \textit{ konvergiert.}$$

Kriterium 1.0.29

äq

(i) $\sum_{n\geq 0} a_n$ *konvergiert absolut*

(ii) Es existiert ein $c \geq 0$ *so dass* $\sum_{n\in E} |a_n| \leq c$ *für jede nicht-leere endliche Menge* $E \subset \mathbb{N}$.

Beweis :

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \; A_n \nearrow .$$

Daher konvergiert (A_n) genau dann, wenn es ein $c \geq 0$ gibt mit $A_n \leq c$. $\square$

Folgerung 1.0.30 (Allgem. Kommutativgesetz)
$\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *absolut konvergent,* $\pi \in Aut(\mathbb{N})$. *Dann konvergiert auch die „umgeordnete" Reihe*

$$\sum_{n\geq 0} a_{\pi(n)}$$

absolut und die Grenzwerte

$$\sum_{n\geq 0} a_n \ \textit{und} \ \sum_{n\geq 0} a_{\pi(n)}$$

stimmen überein.

Beweis : Ist $\emptyset \neq E \subset \mathbb{N}$ endlich, so ist

$$\sum_{n\in E} |a_{\pi(n)}| = \sum_{m\in\pi(E)} |a_m| \leq c.$$

$$s := \lim \sum_{k=0}^{n} a_k, \ s' := \lim \sum_{k=0}^{n} a_{\pi(k)}, \ \varepsilon > 0.$$

Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq N$

$$\left| s - \sum_{k=0}^{n} a_{\pi(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| s' - \sum_{k=0}^{n} a_{\pi(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\sum_{k\geq n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Da $\pi \in Aut(\mathbb{N})$ gibt es ein $M \geq N$ so dass $\{0, 1, \ldots N\} \subset \{\pi(0), \ldots, \pi(M)\}$. Daher ist

$$\begin{aligned} |s - s'| &\leq \left| s - \sum_{k=0}^{N} a_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{M} a_{\pi(k)} \right| + \left| \sum_{k=0}^{M} a_{\pi(k)} - s' \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{\pi(k)>N} |a_{\pi(k)}| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 1.0.31 *(ohne Beweis)*
Konvergiert

$$\sum_{n\geq 0} a_n$$

bedingt, d.h. konvergiert aber konvergiert nicht absolut, so gibt es zu jeder reellen Zahl $A \in \mathbb{R}$ *ein* $\pi \in Aut(\mathbb{N})$ *so dass*

$$A = \sum_{n\geq 0} a_{\pi(n)}.$$

Bemerkung 1.0.32 (Konvergenzkriterien)

(1) Majorantenkriterium 7/12/99

$$\sum_{n\geq 0} c_n \text{ konvergent, } c_n \geq 0 \text{ für fast alle } n,\ |a_n| \leq c_n \text{ für fast alle } n.$$

$$\text{Dann konvergiert } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ absolut.}$$

(2) Quotientenkriterium
$0 \leq \triangle < 1,\ (a_n)$ *so dass*

(i) $a_n \neq 0$ *für fast alle* n

(ii) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \triangle$ *für fast alle* n.

$$\text{Dann konvergiert } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ absolut.}$$

(3) Wurzelkriterium
$0 \leq \triangle < 1,\ (a_n)$ *so dass* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \triangle$ *für fast alle* n.

$$\text{Dann konvergiert } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ absolut.}$$

EX

[1]

$$\sum_{n\geq 1} \frac{log(\sqrt{n}+1)}{n^2} \text{ konvergiert (absolut), da}$$

$$\left|\frac{log(\sqrt{n}+1)}{n^2}\right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \xi\left(\frac{3}{2}\right) \text{ konvergiert.}$$

[2]

$$\sum_{k\geq 0} \frac{k^2}{2^k} \text{ konvergiert (absolut) nach QK;}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} =: \triangle < 1 \text{ für } k \geq 3.$$

[3]

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad \text{konvergiert (absolut) nach WK;}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n}{1+n}\right)^n \leq \frac{1}{2} \text{ nach Bernoulli.}$$

Warnung:

[1] Weder aus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle n noch aus $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ für alle n folgt die Konvergenz von $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ divergiert.}$$

[2] Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|,\ a_n \neq 0$, folgt weder die Existenz eines $0 \leq \triangle < 1$ so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \triangle$ für fast alle n noch die Existenz eines $0 \leq \triangle < 1$ so das $\sqrt{|a_n|} \leq \triangle$ für fast alle n:

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert, aber}$$

$$\sup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sup\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1,\ \sup\sqrt[n]{|a_n|} = \sup\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1.$$

[3] Aus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n folgt stets Divergenz, ebeso aus $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für fast alle n, denn dann kann (a_n) keine Nullfolge sein.