1.2 Elementare Funktionen: exp/log

Lemma 1.2.0 *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Exponentialreihe*

$$\exp(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

absolut.

Beweis : Nach A.6.1. ist $\frac{1}{n!} < \frac{e^{n-1}}{n^n}$, also für $b > 0$, $\frac{b^n}{n!} < (\frac{be}{n})^n \leq 1$ sofern $n \geq b \cdot e$, d.h. $R_{\exp} = +\infty$. $\square$

Satz 1.2.1

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$$

Beweis :

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

Wegen

$$\begin{aligned} 1 \geq \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{n^k} &= 1\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k \\ &\geq 1 - \frac{k(k-1)}{n} \end{aligned}$$

ist

$$\exp(1) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \geq e_n \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-1)k}{k!} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n} \exp(1).$$

$\square$

Theorem 1.2.2 $e \notin \mathbb{Q}$

Beweis :

$$\widehat{e}_n := \sum_{k \leq n} \frac{1}{k!}, \; \widehat{\widehat{e}}_n := \widehat{e}_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Wegen
$$e = \widehat{e}_n + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(n+k)!} < \widehat{e}_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(n+1)^k}$$
ist $\widehat{e}_n < e < \widehat{\widehat{e}}_n$. Angenommen $e = \frac{m}{n},\ m,\ n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist
$$n!\, e = m(n-1)! \text{ und } n!\, \widehat{e}_n \in \mathbb{N},$$
also
$$n!\,(e - \widehat{e}_n) \in \mathbb{N},\ \text{aber } 0 < n!\,(e - \widehat{e}_n) < n!\,(\widehat{\widehat{e}} - \widehat{e}_n) = n!\, \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{n} \leq 1.$$
□

Theorem 1.2.3 (Funktionalgleichung der exp**-Funktion)**
$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y),\ x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Beweis : Für festes $x, y \in \mathbb{R}$ sei 10/12/99
$$A(t) := \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} t^n,\ B(t) := \sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{n!} t^n.$$
A, B sind Potenzreihen mit den Koeffizienten $\frac{x^n}{n!}$ bzw $\frac{y^n}{n!}$ und Konvergenzradius $+\infty$.
$$C(t) = A(t) \cdot B(t) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k+z=n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^z}{z!} \right) t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} (x+y)^n \cdot t^n.$$
Für $t = 1$ hat man $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$. □

Folgerung 1.2.4

(1) $\exp(0) = 1,\ \exp(1) = e$

(2) $\exp(x) > 0,\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(3) $\exp(x) < \exp(y)$ *für* $x < y$

Theorem 1.2.5 *Es gibt genau eine Abbildung*

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

so dass

E1: $E(x + y) = e(x) \cdot E(y)$

E2: $E(x) < E(y)$ *für* $x < y$

E3: $E(1) = e$

nämlich $x \mapsto E(x) = e^x = \exp(x)$.

Beweis : $x \mapsto log\ E(x)$ ist die Identität auf $\mathbb{R}$. Daher ist E die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus. □

Folgerung 1.2.6

(1) $\exp \circ \log = id_{\mathbb{R}_+},\ \log \circ \exp = id_{\mathbb{R}}$

(2) $\exp \frac{x}{1+x} \leq 1 + x \leq \exp x,\ x > -1$
$\exp\ x \leq \frac{1}{1-x} \leq \exp \frac{x}{1-x},\ x < 1.$

Insbesondere: $1 + x \leq \exp x \leq \frac{1}{1-x},\ -1 < x < 1.$

Beweis : $1 - \frac{1}{y} \leq \log y \leq y - 1,\ y = x + 1$ bzw. $\frac{1}{y} = 1 - x.$ □