2.2 Elementare Funktionen: cos/sin

HS $a_n \neq 0$ für alle $n \geq 0, |a_{n+1}/a_n| \to \triangle$. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n$ absolut für $\triangle < 1$ und divergiert für $\triangle > 1$.

Beweis : Sei $\triangle < \eta < 1$. Dann ist für fast alle n der Quotient $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \eta$. Ist $\triangle > 1$ so ist für fast alle n der Quotient ≥ 1. □

Mit Hilfe dieses HS beweist man leicht:

Satz 2.2.0 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Reihen*

$$\cos(x) := \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) := \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

absolut.

Folgerung 2.2.1 $x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x)$ *stetig.*
cos *gerade, d.h.* $\cos(x) = \cos(-x)$
sin *ungerade, d.h.* $\sin(x) = -\sin(-x)$,
$\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$.

Theorem 2.2.2

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y).$$

Beweis : Vgl. Additionstheorem von exp. □

Lemma 2.2.3 *In dem offenen Intervall* $(0, \sqrt{6})$ *ist* cos *streng monoton fallend und* sin *positiv. Außerdem gibt es genau ein* $\alpha \in (0, \sqrt{6})$ *so dass* $cos(\alpha) = 0$, *genauer:* $\alpha \in [\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Definition 2.2.4 $\pi := 2\alpha$

Beweis : $0 < x < y < \sqrt{6}$, $cos(x) - cos(y) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{y^{2n+2} - x^{2n+2}}{(2n+2)!}$. 11/01/00

Die Koeffizienten $a_n := \frac{y^{2n+2} - x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ haben folgende Eigenschaften:

(1) $0 < a_n$

(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$

Nach Leibniz gilt für die Reihe $s = \sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n a_n$

$$s_0 > s_2 > ... > s_{2n} > ... > s > ... > s_{2n+1} > ... > s_3 > s_1 = a_0 - a_1 > 0$$

d.h. cos ist in $(0, \sqrt{6})$ streng monoton fallend.
$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ sieht man folgendermaßen ein:
$d_n := y^n - x^n,\ d_{n+1} = y(y^n - x^n) + x^n(y - x)$
$y^{n+1} - x^{n+1} = (y - x)(y^n + y^{n-1}x + ... + x^n) > (n + 1)(y - x)x^n$
und damit

$$d_{n+1} < y \cdot d_n + \frac{1}{n+1} d_{n+1}$$

$$d_{n+2} < \frac{y^2}{(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{1}{n+2})} d_n$$

also
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{d_{2n+4}}{d_{2n+2}} \cdot (2n + 3)(2n + 4) < \frac{y^2}{(2n+2)(2n+3)} \leq \frac{y^2}{6},\ n \geq 0$. Mit $\sin(x) = \sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n b_n,\ b_n := \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ folgt $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \leq \frac{x^2}{6}$, d.h. für $0 < x < \sqrt{6}$ ist $x = s_0 > s_2 > ... > \sin(x) > ... > s_3 > s_1 = x - \frac{x^3}{6}$
insbesondere

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin(x)}{x} < 1, \quad 0 < x < \sqrt{6}.$$

Für $0 < x < \sqrt{2},\ \cos(x) = \sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n c_n := \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ folgt
$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \leq \frac{x^2}{2}$, also
$1 = s_0 > s_2 > ... > \cos(x) > ... > s_3 > s_1 = 1 - \frac{x^2}{2} > 0$, insbesondere $\cos(\sqrt{2}) \geq 0$ und

$$0 < \frac{1 - \cos(x)}{x} < \frac{x}{2},\ \ 0 < x < \sqrt{2}.$$

Für $y = \sqrt{3}$ ist $\cos\sqrt{3} = 1 - \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{y^{2n+2}}{(2n+2)!} < 1 - \frac{3}{2} < 0$. Daher gibt es nach dem ZWS ein $\alpha \in [\sqrt{2}\sqrt{3})$ so dass $\cos(\alpha) = 0$. □

Folgerung 2.2.5

$$\lim \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

$$\lim \frac{1 - \cos x_n}{x_n} = 0$$

für alle $x_n \to 0, x_n \neq 0$.

Folgerung 2.2.6

(1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

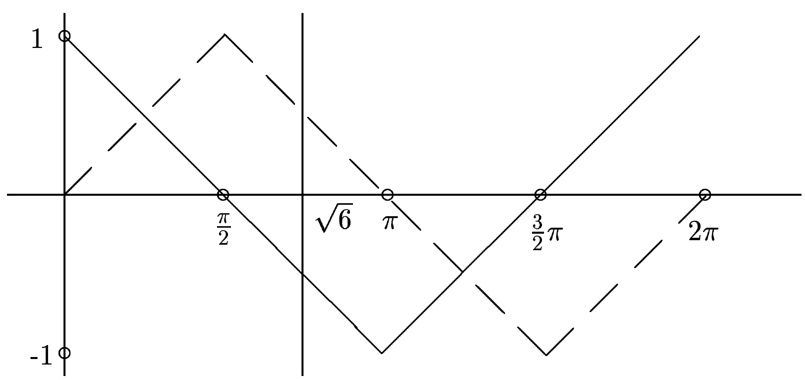
(2) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x,\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
$\cos(x + \pi) = -\cos x,\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x,\ \sin(x + 2\pi) = \sin x$
d.h. cos *und* sin *sind periodische Funktionen mit der Periode* 2π.

(3) $\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0$
$\cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1$
$\cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0$
$\cos 2\pi = 1,\ \sin 2\pi = 0$

(4) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

(5) $\cos\mathbb{R} = \sin\mathbb{R} = [-1, 1]$.

Bemerkung 2.2.7 (Approximativer Graph)



cos	$+\downarrow$ $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$	$-\downarrow$ $\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$	$-\uparrow$ $\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$	$+\uparrow$ $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$
sin	$+\uparrow$ $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$	$+\downarrow$ $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$	$-\downarrow$ $\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$	$-\uparrow$ $\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$

Folgerung 2.2.8

(1) $NST(\cos) = \mathbb{Z} \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$

(2) $NST(\sin) = \mathbb{Z} \cdot \pi$.

Beweis : Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \cos \frac{\pi}{2}$.
Sei umgekehrt $\cos \overline{x} = 0$. Wähle $k \in \mathbb{Z}$, so dass $-\frac{\pi}{2} < \overline{x} - k\pi \leq \frac{\pi}{2}$. Dann ist $\cos(\overline{x} - k\pi) = \cos(-(\overline{x} - k\pi)) = \pm \cos \overline{x} = 0$, d.h. Œ $0 \leq \overline{x} - k\pi \leq \frac{\pi}{2}$, also $\overline{x} = k\pi + \frac{\pi}{2}$. □

Definition 2.2.9

(1) $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x},\ x \notin \mathbb{Z}\pi + \frac{\pi}{2}$

(2) $\cot x := \frac{\cos x}{\sin x},\ x \notin \mathbb{Z}\pi.$

Bemerkung 2.2.10 (Ausblick) $z = x + iy \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2,\ x, y \in \mathbb{R}$. *Der Betrag* $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ *der komplexen Zahl* z *hat die drei charakteristischen Eigenschaften einer Norm*

N1: $|z| \geq 0,\ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

N2: $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

N3: $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Aufgrund der $\triangle$*-Ungleichung (N3) kann man auch in* $\mathbb{C}$ *sinnvoll von konvergenten Folgen und Reihen reden, insbesondere konvergiert die Exponentialreihe*

$$exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ *absolut, und nach dem allgemeinen Kommutativgesetz für absolut konvergente Reihen gilt auch in* $\mathbb{C}$ *das Additionstheorem*

$$exp(z + w) = exp(z) \cdot exp(w).$$

Für $z = it,\ t \in \mathbb{R}$, *schließlich ist*

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t,$$

woraus

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt$$

folgt.
Das Additionstheorem des cos *und* sin *entspricht der Multiplikation komplexer Zahlen:*

$$\begin{aligned}
\cos(t + t') + \sin(t + t') &= \exp i(t + t') \\
&= \exp it \cdot \exp it' \\
&= (\cos t \cdot \cos t' - \sin t \cdot \sin t) \\
&\quad + i(\cos t \cdot \sin t' + \cos t' \cdot \sin t).
\end{aligned}$$

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \big| \; |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \; x^2 + y^2 = 1\}$ ist die sogenannte 1-Sphäre - der Rand eines Kreises vom Radius 1.

Ⓢ Zu jedem $(x,y) \in S^1$ gibt es genau ein $t \in [0, 2\pi)$, so dass

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t. \end{aligned}$$

Beweis : $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |x| \leq 1$. Da $\cos\,[0, 2\pi) = [-1, 1]$, gibt es ein $t \in [0, 2\pi)$ mit $\cos(t) = \cos(-t) = x$. Aus $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$ folgt
$y = \pm \sin t$. Ist $y = -\sin t$, so ist $\tau := -t + 2\pi \in [0, 2\pi)$ und $y = \sin \tau$, $x = \cos \tau$.
Sei $0 \leq t < t' \leq 2\pi$ und $\cos t = \cos t'$, $\sin t = \sin t'$. Dann ist entweder $0 \leq t < t' \leq \pi$ oder $\pi < t < t' < 2\pi$. Da in den Intervallen $[0, \pi]$ bzw. $[\pi, 2\pi]$ der cos streng monoton ist, ist $\cos t \neq \cos t'$ □

Definition 2.2.11 *Seien p, $p' \subset [a,b]$ endliche Teilmengen.*
p Teilung (oder Partition) von $[a,b] :\Leftrightarrow a, b \in p$.
p' Verfeinerung von $p :\Leftrightarrow p \subset p'$

Die Punkte $t \in p$ einer Teilung p lassen sich anordnen: 12/01/00

$$p : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Sei $(x,y) = (\cos t,\ \sin t) \in S^1,\ t \in [0, 2\pi),\ p$ Teilung von $[0,t]$

$$p : 0 < t_0 < \ldots t_n = t$$

und s_p der Streckenzug von $(1,0)$ nach (x,y) mit den Ecken $z_j := \exp it_j$, $j = 0, \ldots n$; die Strecke zwischen den Punkten $z_j,\ z_{j+1}$ ist gegeben durch

$$(1-\tau)z_j + \tau z_{j+1},\ \tau \in [0,1].$$

$$b(s_p) := \sum_{j=0}^{n-1} |z_{j+1} - z_j|$$

ist dann per definitionem die Länge des Streckenzuges s_p. Ist $p \subset p'$ eine Verfeinerung, so ist $b(s_p) \leq b(s_{p'})$.

Lemma 2.2.12 *p Teilung von $[0,t]$, $0 < \varepsilon$. Dann gibt es eine Verfeinerung $p \subset p'$, so dass*

(1) $(1-\varepsilon)t \leq b(s_{p'}) \leq (1+\varepsilon)t$

(2) $b(s_p) \leq b(s_{p'})$.

Beweis : Wähle $\delta > 0$, so dass

$$1 - \varepsilon < \frac{\sin \tau}{\tau} < \sqrt{1+\varepsilon},\ 0 < \frac{1-\cos\tau}{\tau} < \sqrt{\varepsilon},\ 0 < \tau < \delta.$$

Wähle Verfeinerung $p' : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ von p, so dass $\tau_j := t_{j+1} - t_j < \delta$. Dann ist $b(s_p) \leq b(s_{p'})$ und

$$\begin{aligned} b(s_{p'}) &= \sum_{j=0}^{n-1} |\exp(it_{j+1}) - \exp(it_j)| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} |\exp(i\tau_j) - 1| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(\cos\tau_j - 1)^2 + \sin^2\tau_j}. \end{aligned}$$

Für jedes j ist

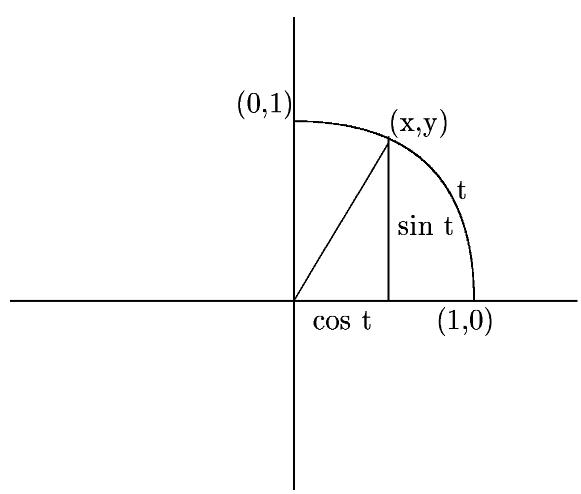
$$\tau_j(1-\varepsilon) < \sqrt{(\cos\tau_j - 1)^2 + \sin^2\tau_j} < \tau_j(1+\varepsilon),$$

also nach Teleskop-Summation

$$t(1-\varepsilon) < b(s_{p'}) < t(1+\varepsilon).$$

□

Folgerung 2.2.13 *:* $\sup\{b(s_p)|\ p$ *Teilung von* $[0,t]\} = t$.
Dieses Supremum ist per Definition die Länge des Kreisbogens von $(1,0)$ *noch* (x,y). *Insbesondere ist die Gesamtlänge von* S^1 *gerade* 2π. *Sie liefert die von der Schule gewohnte Definition von* sin *und* cos.



Ergänzung (nicht Teil der Vorlesung)

$(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkte Folge reeller Zahlen.

$$\overline{a_n} := \sup\{a_k | k \geq n\} = \sup_{k\geq n} \ a_k$$

$$\underline{a_n} := \inf\{a_k | k \geq n\} = \inf_{k\geq n} \ a_k$$

Offenbar gilt

(1) $\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}$

(2) $\underline{a_n} \nearrow, \ \overline{a_n} \searrow$.

Da (a_n) beschränkt ist, existieren die Limiten $\lim \ \underline{a_n}$ bzw. $\lim \ \overline{a_n}$ und es gilt

$$\overline{\lim}\ a_n := \lim \ \overline{a_n} = \inf_n \ \sup_{k\geq n} \ a_k \text{ („Limes superior“)}$$
$$\underline{\lim}\ a_n := \lim \ \underline{a_n} = \sup_n \ \inf_{k\geq n} \ a_k \text{ („Limes inferior“)}$$

Ⓢ Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen

äq
(i) (a_n) ist konvergent
(ii) $\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n$.

Folgerung 2.2.14 : *Konvergiert (a_n), so ist*

$$\lim \ a_n = \overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n.$$

Beweis :
$(ii) \Rightarrow (i) : \underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}$
$(i) \Rightarrow (ii) : \underline{\lim} \ \ a_n \leq \lim \ a_n \leq \overline{\lim}\ a_n$.
$a := \lim \ a_n$, $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \geq 0$, so dass $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dann ist
$a - \varepsilon \leq \underline{\lim}\ a_n \leq \overline{\lim}\ a_n \leq a + \varepsilon$, d.h. $\underline{\lim}\ a_n = \overline{\lim}\ a_n = \lim \ a_n$. □

Theorem 2.2.15 *(Hadamard)*

$$\textit{Sei } A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, \textit{ so dass } (\sqrt[n]{|a_n|}) \textit{ beschränkt.}$$

Dann ist

$$R_A = \begin{cases} \infty & \textit{falls } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} & \textit{falls } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \neq 0 \end{cases}$$

EX:

$$\text{Für } A(x) = \sum_{n \geq 0} (1 + (-1)^n) n \cdot x^n \text{gilt}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & n \equiv 1(2) \\ \sqrt[n]{2n} & n \equiv 0(2) \end{cases}$$

$$\text{also } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \text{ d.h. } R_A = 1$$

Beweis : Da $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt, ist $R_A > 0$. Zu $0 < t < R_A$ gibt es dann ein $c > 0$ so dass $|a_n t^n| \leq c$, d.h. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\sqrt[n]{c}}{t}$ und damit $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{t}$. Ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$, so ist $\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \geq t$, d.h. $\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \geq R_A$, insbesondere $R_A \neq \infty$.
Ist $0 < t < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$, so ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{t}$$

für alle $n \geq N$, N geeignet, also $(a_n t^n)$ beschränkt, d.h. $R_A \geq \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
Ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und $1 > \varepsilon > 0$, so ist $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$, N geeignet, d.h. $(a_n \varepsilon^{-n})$ beschränkt und damit $R_A = \infty$. $\square$