Kapitel 2

Stetige Funktionen

2.0 Stetige Funktionen auf Intervallen

$\emptyset \neq X$ Menge, $\mathbb{R}^X = \{f : X \to \mathbb{R}\}$

Bemerkung 2.0.0 (vgl. 1.0.8) *Die Menge $\mathbb{R}^X$ der auf X reellwertigen Funktionen ist auf natürliche Weise eine $\mathbb{R}$ -Algebra mit $\mathbb{1}$:*

$$(f \overset{+}{\underset{\cdot}{-}} g)(x) := f(x) \overset{+}{\underset{\cdot}{-}} g(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

$$\mathbb{1}(x) := 1$$

für alle $x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $\mathbb{R}^X$ partiell geordnet:

$$f \leq g :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x),\ x \in X.$$

Mit $f,\ g$ liegt auch $f \overset{\wedge}{\vee} g,\ |f|$ in $\mathbb{R}^X$:

$$f \overset{\wedge}{\vee} g(x) := f(x) \overset{\wedge}{\vee} g(x),\ x \in X.$$

Durch $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^X,\ \lambda \mapsto \lambda \cdot \mathbb{1}$, wird $\mathbb{R}$ mit den konstanten, reellwertigen Funktionen auf X identifiziert.

EX:

$f_+ := f \vee 0,\ f_- := -(f \wedge 0),\ f_\pm \geq 0,$
$f = f_+ - f_-,\ |f| = f_+ + f_-.$

Definition 2.0.1 $\overline{x} \in X \subset \mathbb{R},\ f \in \mathbb{R}^X,\ d.h.\ f : X \to \mathbb{R}$

(1) f stetig in $\overline{x}$:⇔ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $|x - \overline{x}| < \delta$.

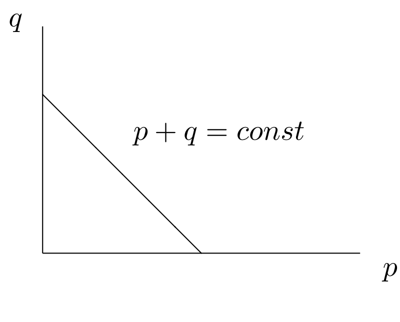
(2) f stetig (auf X):⇔ f stetig in allen Punkten $x \in X$.

EX:

[1] $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$
f unstetig in $\overline{x} = 0$, stetig in allen $x > 0$.
Beweis : $\overline{x} = 0$: wäre f stetig in $\overline{x}$, so gäbe es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ so dass $f(x) = |f(x) - f(\overline{x})| < 1$ für alle $|x - \overline{x}| < \delta,\ x \geq 0$. Nach Archimdedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n} < \delta$, insbesondere $n \geq 1$. $f\left(\frac{1}{n}\right) = n \geq 1$, ein Widerspruch.
$\overline{x} > 0$: Für $|x - \overline{x}| < \frac{1}{2}\overline{x}$ ist $x \cdot \overline{x} \geq \overline{x}\Big||x - \overline{x}| - |\overline{x}|\Big| \geq \frac{1}{2}\overline{x}^2$, also
$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{\overline{x}}\right| = \frac{|\overline{x}-x|}{x\overline{x}} \leq \frac{2}{\overline{x}^2}|x - \overline{x}|$. Wähle zu $\varepsilon > 0$ deshalb $0 < \delta \leq \min\{\frac{1}{2}\overline{x}, \frac{\overline{x}^2}{2} \cdot \varepsilon\}$.
□

[2] $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in allen $\overline{x} \in \mathbb{R}$.
Beweis : $|\exp x - \exp \overline{x}| = (\exp \overline{x}) \cdot |\exp(x - \overline{x}) - 1|$. Für $-\frac{1}{2} < (x - \overline{x}) < \frac{1}{2}$ ist $x - \overline{x} < \exp\,(x - \overline{x}) - 1 < \frac{x - \overline{x}}{1-(x-\overline{x})} < 2|x - \overline{x}|$ d.h.
$|\exp x - \exp\ \overline{x}| < 2|x - \overline{x}| \cdot \exp\ \overline{x}$. Wähle zu $\varepsilon > 0$ deshalb
$0 < \delta \leq \min\{\frac{1}{2},\ \frac{\varepsilon}{2\exp\ \overline{x}}\}$. □

[3] $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}, \psi(x) := \begin{cases} 0 & x \ irrational \\ \frac{1}{p+q} & x = \frac{p}{q}\ rational,\ p,q \in \mathbb{N} \\ & q \neq 0,\ ggT(p,q) = 1 \end{cases}$ 14/12/99
z.B. $\psi(0) = 1,\ \psi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}, \psi(1) = \frac{1}{2}$
ψ ist stetig in allen irrationalen Punkten und unstetig in allen rationalen Punkten.
Beweis : $\overline{x} = \frac{p}{q}$ rational: Wäre ψ stetig in $\overline{x}$, so gäbe es zu $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\psi(\overline{x}) = \frac{1}{2(p+q)}$ ein $\delta > 0$, so dass $|\frac{1}{p+q} - \psi(x)| < \varepsilon$ für alle $|x - \frac{p}{q}| < \delta,\ x \in [0,1]$. Für ein derartiges irrationales x ist dann $\frac{1}{p+q} < \frac{1}{2(p+q)}$, ein Widerspruch.
$\overline{x}$ irrational: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Paare natürlicher Zahlen $(p,q) \neq 0$ so dass $p + q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ □



$x_1, \ldots, x_s$ seien die diesen Paaren entsprechenden rationalen Zahlen. Wähle $\delta := \frac{1}{2}\min\{|x_1 - \overline{x}|, \ldots, |x_s - \overline{x}|\}$. Ist dann $x = \frac{p}{q} \in [0,1]$ rational und $|x - \overline{x}| < \delta$ so ist $x \neq x_1, \ldots, x_s$, also $|\psi(x) - \psi(\overline{x})| = \frac{1}{p+q} < \varepsilon$.

Satz 2.0.2 $\overline{x} \in X,\ f : X \to \mathbb{R}$

äq

(i) f *stetig in* $\overline{x}$

(ii) $f(x_n) \to f(\overline{x})$ *für alle Folgen* $x_n \to \overline{x},\ x_n \in X.$

Beweis : $(i) \to (ii)$: $x_n \to \overline{x},\ x_n \in X$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$ für alle $|x - \overline{x}| < \delta,\ x \in X$. Wähle N so dass $|x_n - \overline{x}| < \delta,\ n \geq N$.
$(ii) \to (i)$: Sonst gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ so dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $x_\delta \in X$ gibt mit $|x_\delta - \overline{x}| < \delta$, aber $|f(x_\delta) - f(\overline{x})| \geq \varepsilon_0$. Wähle zu $\delta_n = \frac{1}{n}$ jeweils $x_n \in X$ mit $|x_n - \overline{x}| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(\overline{x})| \geq \varepsilon_0$. Widerspruch. □

EX:

$X := [0,1) \cup \{2\},\ f : X \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 1 & x = 2 \\ x & x \neq 2 \end{cases}$
f ist stetig. $X \ni x_n \to 2 \Rightarrow x_n = 2$ für fast alle n.

Folgerung 2.0.3 $f,\ g \in \mathbb{R}^X,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \overline{x} \in X,\ Y \subset X.$
Ist $f,\ g$ *stetig in* $\overline{x}$*, so ist auch* $f \pm g,\ \lambda \cdot f, \frac{f}{g}$ *sofern definiert* $f \overset{\wedge}{\vee} g,\ |f|,\ f|Y$ *sofern* $\overline{x} \in Y$*, stetig in* $\overline{x}$*.*

Folgerung 2.0.4 *Die Menge* $C(X) := \{f : X \to \mathbb{R}$ *stetig*$\}$ *der auf* X *stetigen Funktionen ist auf natürliche Art und Weise eine* $\mathbb{R}$*-Algebra.*

EX:

$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$

$$x \mapsto p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ Polynome vom Grade } n$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots a_n$.
p ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Folgerung 2.0.5 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{R},\ \overline{x} \in X.$
Ist f *stetig in* $\overline{x}$ *und* g *stetig in* $\overline{y} = f(\overline{x})$*, so ist* $g \circ f$ *stetig in* $\overline{x}$*.*

EX: $a > 0,\ x \mapsto a^x = \exp(x \log a)$ stetig.

Theorem 2.0.6 (lokale Beschränktheit) *$f : X \to \mathbb{R}$ stetig in $\overline{x} \in X$, $a, b \in \mathbb{R}$ so dass $a < f(\overline{x}) < b$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so dass $a < f(x) < b$ für alle $|x - \overline{x}| < \delta,\ x \in X$.*

Beweis : Wähle $\delta > 0$ zu $\varepsilon := \min\{f(\overline{x}) - a,\ b - f(\overline{x})\} > 0$. □

Bezeichnung Mit $B(X)$ wird die $\mathbb{R}$-Algebra der auf X beschränkten Funktionen bezeichnet, d.h. derjenigen $f \in \mathbb{R}^X$ für die es ein $c \geq 0$ gibt mit

$$|f(x)| \leq c \text{ für alle } x \in X.$$

EX: $x \mapsto \exp(-x^2)$ ist durch 1 beschränkt, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber unbeschränkt.

Theorem 2.0.7 $a \leq b \Rightarrow C[a, b] \subset B[a, b]$.

WARNUNG: Für offene Intervalle ist das Theorem falsch: $(0, 1) \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist unbeschränkt.

Beweis : $A := \{\tau \in [a, b] \big| f|[a, \tau] \text{ beschränkt}\}$. Wegen der lokalen Beschränktheit gibt es ein $a < \overline{\tau} \leq b$ so dass $f|[a, \overline{\tau}]$ beschränkt, d.h. $[a, \overline{\tau}] \subset A$, insbesondere existiert $\tau_* := \sup\ A,\ a < \tau_* \leq b$. Wegen der lokalen Beschränktheit in τ_* gibt es $a < \alpha < \tau_* < \beta$ so dass $f|[\alpha, \beta] \cap [a, b]$ beschränkt, d.h. $f|[a, \beta] \cap [a, b]$ ist beschränkt. Ist $\beta \leq b$, so ist $\beta \in [a, b]$, also $\beta \leq \tau_*$, ein Widerspruch, also $\beta > b$ und damit $[a, \beta] \cap [a, b] = [a, b]$, f also insgesamt beschränkt. □

Folgerung 2.0.8 (Satz vom Maximum) *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $x_*,\ x^* \in [a, b]$, so dass*

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$$

für alle $x \in [a, b]$, d.h. jede stetige Funktion nimmt in $[a, b]$ Maximum und Minimum an.

Beweis : $M := \sup f[a, b]$ existiert. Angenommen $M \neq f(x)$ für alle x. Dann ist $M - f(x) > 0$ und $x \mapsto g(x) := \frac{1}{M - f(x)}$ stetig auf $[a, b]$. Nach Theorem 2.07 ist g beschränkt, daher gibt es ein C so dass $0 < \frac{1}{M - f(x)} \leq C$ für alle $x \in [a, b]$, also $0 < \frac{1}{c} \leq M - f(x)$. Daher gibt es ein C, so dass $0 < \frac{1}{M} - f(x) \leq C$ für alle $x \in [a, b]$, also $0 < \frac{1}{C} \leq M - f(x)$ und damit $f(x) \leq M - \frac{1}{C}$, also $M \leq M - \frac{1}{C}$, ein Widerspruch. □

Theorem 2.0.9 (Zwischenwertsatz) *$a, b \in I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a < b$, $\xi \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so dass $f(a) \leq \xi \leq f(b)$ bzw. $f(a) \geq \xi \geq f(b)$. Dann gibt es ein $a \leq \overline{x} \leq b$, so dass $f(\overline{x}) = \xi$.*

Beweis Œ: $f(a) < \xi < f(b)$. Definiere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - \xi$. 15/12/99
Dann ist g stetig, $g(a) < 0$, $g(b) > 0$, $A := \{\tau \in [a, b] \big| \; g|[a, \tau] < 0\}$. Nach der lokalen Beschränktheit gibt es ein $a < \overline{\tau} \leq b$, so dass $g|[a, \overline{\tau}] < 0$. Insbesondere gibt es $\tau_* := \sup A$, $a < \tau_* \leq b$, $g(\tau_*) \leq 0$, also $\tau_* \neq b$. Wäre $g(\tau_*) < 0$, so gäbe es wieder wegen der lokalen Beschränktheit $a < \alpha < \tau_* < \beta < b$, so dass $g|[\alpha, \beta] < 0$ und damit $g|[a, \beta] < 0$, folglich $\beta \leq \tau_*$, ein Widerspruch. $\square$

Folgerung 2.0.10 *$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch bild $f = f(I)$ ein Intervall.*

Folgerung 2.0.11 *$a \leq b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.*
$\underline{M} := \min f[a, b] \leq \overline{M} := \max f[a, b]$. *Dann ist* $f[a, b] = [\underline{M}, \overline{M}]$.

EX:

[1] $\overline{\mathbb{R}}_+ \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}_+$, $x \mapsto x^n$, $n > 0$, surjektiv.
Beweis : $\xi \in \overline{\mathbb{R}}_+ : f(0) = 0 \leq \xi < 1 + n\xi \leq f(1 + \xi)$ nach Bernoulli, also $\xi \in [f(0), \; f(1 + \xi]$ $\subset$bild f nach Folgerung 2.0.10. $\square$

[2] $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ surjektiv.
Beweis : Für $\xi \geq 1$ ist $\exp(0) = 1 \leq \xi < 1 + \xi \leq \exp(1 + \xi)$, also $\xi \in [\exp(0), \; \exp(1 + \xi)] \subset$ bild exp.
Für $0 < \xi < 1$ ist $\frac{1}{\xi} > 1$, also $\frac{1}{\xi} = \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}, \xi = \exp(-x)$, d.h. $\xi \in$ bild exp. $\square$

[3] Jedes Polynom p ungeraden Grades $x \mapsto p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, $n = 2m + 1$, hat eine reelle Nullstelle.
Beweis : Œ $a_n = 1$. Für $|x| \gg 0$ ist dann $\frac{p(x)}{x^n} = 1 + \frac{1}{x} \cdot a_{n-1} + \ldots + \frac{1}{x^n} \cdot a_0 \geq \frac{1}{2}$, d.h. $p(x) > 0$ für $x \gg 0$, $p(x) < 0$ für $-x \gg 0$. $\square$

Definition 2.0.12 *I Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$.*
f streng monoton steigend :⇔ $f(x) < f(y)$ für alle $x < y$, $x, y \in I$.
f streng monoton fallend :⇔ $f(x) > f(y)$ für alle $x < y$, $x, y \in I$.

Satz 2.0.13 *$f : I \to \mathbb{R}$ stetig*

äq

(i) f injektiv

(ii) f streng monoton.

Beweis : Nur $(i) \Rightarrow (ii)$ ist relevant.Œ $\emptyset \neq I \neq pt.$ $a, b \in I,\ a < b.$ Œ $f(a) < f(b)$. Dann ist aufgrund der Injektivität und des ZWS $f(a) < f(x) < f(b)$ für alle $a < x < b$. Das selbe Argument auf $[x, b]$ angewendet liefert $f(x) < f(y) < f(b)$ für alle $x < y < b$, d.h. $f|[a, b]$ streng monoton steigend. Daher ist $f|[A, B]$ streng monoton steigend für alle $[a, b] \subset [A, B] \subset I$ und damit f. □

Satz 2.0.14 *I Intervall, $f := I \to \mathbb{R}$ stetig, injektiv, $J :=$ bild f. Dann gibt es genau ein $g : J \to I$, so dass*

(1) $f \circ g = id_J,\ g \circ f = id_I$

(2) g stetig.

EX:

$$f : [0, 1) \cup \{2\} \longrightarrow [0, 1],\ f(x) := \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

ist stetig, bijektiv. Die Umkehrabbildung ist unstetig.

Beweis : $J :=$ *bild* f ist ein Intervall, $f : I \to J$ bijektiv. Deshalb gibt es genau ein $g : J \to I$, so dass $g \circ f = id_I,\ f \circ g = id_J$. Es genügt zu zeigen, dass $g|[A, B]$ stetig ist, für alle $[A, B] \subset I,\ A < B$. Œ f streng monoton steigend, $[A, B] = f[a, b],\ [a, b] \subset I,\ a < b.$ $\overline{x} := g(\overline{y}) \in (a, b),\ \overline{y} \in (A, B),\ \varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $0 < \mu < \varepsilon$, so dass $[\overline{x} - \mu,\ \overline{x} + \mu] \subset (a, b)$, also $f[\overline{x} - \mu, \overline{x} + \mu] = [f(\overline{x} - \mu),\ f(\overline{x} + \mu)] \subset (A, B)$. Dann gibt es ein $0 < \delta$, so dass $[\overline{y} - \delta,\ \overline{y} + \delta] \subset [f(\overline{x} - \mu),\ f(\overline{x} + \mu)]$, also $g(\overline{y} - \delta,\ \overline{y} + \delta) \subset [\overline{x} - \mu,\ \overline{x} + \mu] \subset (\overline{x} - \varepsilon,\ \overline{x} + \varepsilon)$. Die Stetigkeit von $g|[A, B]$ in den Randpunkten verläuft im wesentlichen genauso. □