## 2.1 Folgen stetiger Funktionen

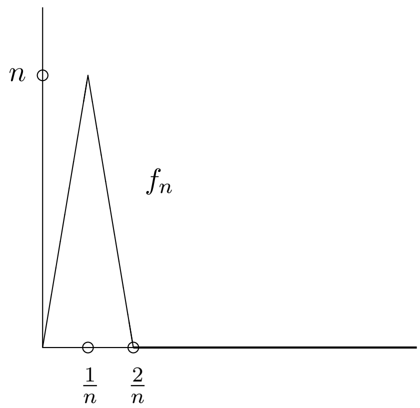
$\emptyset \neq X$ Menge, $f,\ f_n \in \mathbb{R}^X,\ n = 0, 1, 2, ...$

**Definition 2.1.0** $(f_n)_{n\geq 0}$ *konvergiert punktweise gegen* $f$
$:\Leftrightarrow f_n(x) \to f(x)$ *für alle* $x \in X$.

Liegt punktweise Konvergenz vor, schreibt man $f_n \xrightarrow[ptw]{} f$ oder
$f = \text{ptw-lim } f_n$.

**EX:**

[1] $X = \overline{\mathbb{R}}_+$




$$f = ptw - \lim f_n = 0$$

[2] $X = [0, 1],\ f_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := x^n$

$$f_n \xrightarrow[ptw]{} f,\ f(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

**Moral:** $f_n \xrightarrow[ptw]{} f,\ f_n$ stetig $\overset{i.a.}{\not\Rightarrow}$ $f$ stetig.

**Bemerkung 2.1.1**

*(1)* $(f_n)$ *konvergiert punktweise* $\Leftrightarrow$ $(f_n)$ *punktweise Cauchy-Folge.*

*(2)* $f_n \xrightarrow[ptw]{} f,\ g_n \xrightarrow[ptw]{} g,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$f_n \pm g_n \xrightarrow[ptw]{} \pm g$
$\lambda \cdot f_n \xrightarrow[ptw]{} \lambda \cdot f$
$|f_n| \xrightarrow[ptw]{} |f|$

**Definition 2.1.2** $f \in BX$

$$||f|| := \sup\{|f(x)|\,|x \in X\} = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

*Supremumsnorm von $f$ auf $X$.*

**Bemerkung 2.1.3**

*[1]* $|f(x)| \leq ||f||$ *für alle* $x \in X$.

*[2]* $||f||$ *ist i.a. kein Funktionswert:* $||id_{(0,1)}|| = 1$.

*[3]* $\emptyset \neq Y \subset X,\ f \in BX \Rightarrow ||f|Y|| \leq ||f||$.

*[4]* $||\,|f|\,|| = ||f||$.

**Bemerkung 2.1.4** *Die Abbildung* $||\ || : BX \to \overline{\mathbb{R}}_+, f \mapsto ||f||$, *hat folgende Eigenschaften:*

*N1:* $||f|| \geq 0,\ ||f|| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

*N2:* $||\lambda \cdot f|| = |\lambda| \cdot ||f||,\ \lambda \in \mathbb{R}$

*N3:* $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$.

*Beweis (Exemplarisch N3):* $x \in X$,
$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f|| + ||g||$, also

$$||f + g|| = \sup_{x\in X} |(f + g)(x)| \leq ||f|| + ||g||.$$

□

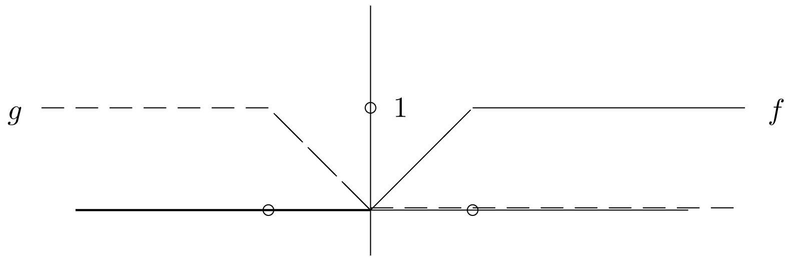
**Folgerung 2.1.5**

*(1)* $||f \cdot g|| \leq ||f|| \cdot ||g||$

*(2)* $\Big|\,||f|| - ||g||\,\Big| \leq ||f \pm g|| \leq ||f|| + ||g||$

*(3)* $||f|| \leq ||g||$ *für* $-g \leq f \leq g$.

**WARNUNG:** Die Norm ist i.a. nicht multiplikativ, d.h. $||f \cdot g|| \overset{i.a.}{\neq} ||f|| \cdot ||g||$




$f \cdot g = 0, ||f|| \cdot ||g|| = 1.$

**Definition 2.1.6** *$f,\ f_n \in \mathbb{R}^X$ so dass $f_n - f,\ f_n - f_m \in BX$ für alle $n, m$*

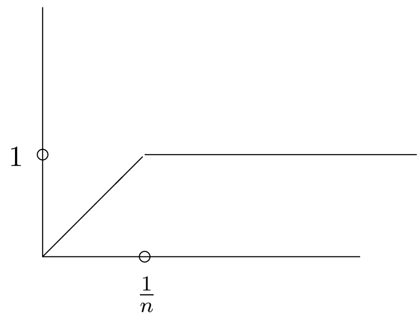
*(1) $f_n$ konvergiert gleichmäßig gegen $f :\Leftrightarrow ||f_n - f|| \to 0$.*

*(2) $f_n$ gleichmäßige Cauchy-Folge $:\Leftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $||f_n - f_m|| < \varepsilon$ für alle $n,\ m \geq N$.*

Liegt gleichmäßige Konvergenz vor, so schreibt man $f_n \underset{||\ ||}{\longrightarrow} f$ bzw. $f = ||\ ||\text{-lim}\ f_n$, oder auch $f_n \underset{glm}{\longrightarrow} f$. Der gleichmäßige Limes $f$ ist 1-deutig bestimmt, falls er existiert.

**EX:**

[1] $X = \overline{\mathbb{R}}_+,\ f_n(x) := \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{n} \\ nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$




$f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} f,\ f(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, aber: $f_n \underset{||\ ||}{\not\longrightarrow} f$

Für $x = \frac{1}{2n}$ ist nämlich $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}$, d.h. $||f_n - f|| \geq \frac{1}{2}$ für alle $n$.

[2] $X = [0, \frac{1}{2}], f_n(x) = x^n, ||f_n|| \leq \frac{1}{2^n},$ *d.h.* $||f_n|| \underset{||\ ||}{\longrightarrow} 0.$

**Bemerkung 2.1.7** $f_n, f \in BX$.

*[1]* $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f \Rightarrow f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} f$.

*[2]* $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f \Rightarrow f \in BX, (\|f_n\|)$ *beschränkt.*

*[3]* $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f,\ g_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} g,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f_n \dot{\pm} g_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f \dot{\pm} g,\ \lambda \cdot f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} \lambda \cdot f,$
$|f_n| \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} |f|$.

**Satz 2.1.8** $f_n \in BX,\ n = 0, 1, 2, ...$

*äq*

*(i)* $(f_n)$ $\|\ \|$*-Cauchy-Folge*

*(ii) Es gibt ein* $f \in BX$*, so dass* $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f$.

*Beweis :* $(ii) \Rightarrow (i)$ : $\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\|$.
$(i) \Rightarrow (ii)$ : Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N$ so dass $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $n,\ m \geq N$. Für alle $x$ ist deshalb $(f_n(x))$ eine reelle $CF$. Insbesondere existiert $f(x) = \lim\ f_n(x)$, d.h. $f = ptw. \lim\ f_n$. In der Grenze ist $|f_n(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ und zwar unabhängig von $x \in X$, also $\|f_n - f\| \leq \frac{\varepsilon}{4} < \epsilon$ für alle $n \geq N$. □

**Satz 2.1.9** $f_n \in BX,\ n = 0, 1, 2, ...\ ,\ C \geq 0$ *so dass*

$$\sum_{k \in E} \|f_k\| \leq C$$

*für alle* $\emptyset \neq E \subset \mathbb{N}$ *endlich. Dann konvergiert* $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ *absolut und gleichmäßig.*

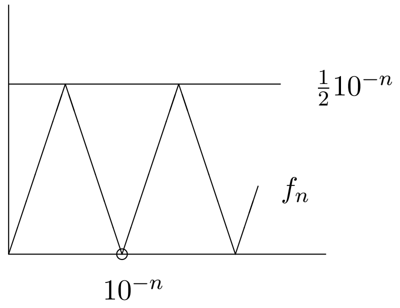
**EX:** $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_n(x) := 10^{-n} \cdot \{10^n \cdot x\}$ wobei 21/12/99

$$\{a\} := \min\{|a - n| \,\big|\, n \in \mathbb{N}\},$$

insbesondere $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. Deshalb ist $\|f_n\| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$, also

$$\sum_{n \in E} |10^{-n} \cdot \{10^n x\}| \leq \sum_{n \in E} \|f_n\| \leq \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} 10^{-n} = \frac{5}{9}.$$

Damit konvergiert $\sum_{n \geq 0} f_n$ absolut und gleichmäßig.




**Theorem 2.1.10** $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f_n \in CX, n = 0, 1, 2, ...$ $f : X \to \mathbb{R}$ *so dass* $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f$. *Dann ist auch* $f \in CX$.

**EX:**

$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$. $f_n$ konvergiert nicht gleichmäßig, da sonst $\|\ \|$-$\lim f_n = ptw. \lim\ f_n = f$,

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$$

und $f$ stetig wäre.

*Beweis :* $x,\ \overline{x} \in X$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\overline{x})| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\overline{x})| + |f_n(\overline{x}) - f(\overline{x})| \\ &\leq \|f - f_n\| + |f_n(x) - f_n(\overline{x})| + \|f_n - f\|. \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N$ so dass

$$\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n \geq N$. Da $f_N$ stetig gibt es ein $\delta > 0$ so dass $|f_N(x) - f_N(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $|x - \overline{x}| < \delta,\ x \in X$, also $|f(x) - f(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, |x - \overline{x}| < \delta,\ x \in X$. □

**Theorem 2.1.11 (Dini[1])** $a \leq b$, $f, f_n \in C[a, b]$, $n = 0, 1, 2, ...$ *so dass* $f_n \nearrow f$, *d.h.* $f_n(x) \nearrow f(x)$ *für alle* $x \in [a, b]$. *Dann konvergiert* $(f_n)$ *gleichmäßig gegen* $f$. *Analog für* $f_n \searrow f$.

**EX:** $f_n : [a, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt[n]{x}, a > 0$. $f_n \nearrow 1$ und damit $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} 1$.

*Beweis :* Œ $f_n \searrow 0$. Angenommen $(f_n)$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \geq k$ gibt mit

[1] Ulisse Dini (1845-1918)

$||f_{n_k}|| \geq \varepsilon$. Insbesondere gibt es $x_k \in [a,b]$ so dass $f_{n_k}(x_k) \geq \frac{1}{4}\varepsilon$.
Œ $x_k \to \overline{x} \in [a,b]$. Dann gibt es ein $N$ so dass $0 \leq f_n(\overline{x}) \leq f_N(\overline{x}) < \frac{\varepsilon}{8}$ für alle $n \geq N$. Da $f_N$ stetig, gibt es ein $\delta > 0$ so dass $f_N(x) < \frac{\varepsilon}{8}$ für alle $|x - \overline{x}| \leq \delta,\ x \in [a,b]$. Da $x_k \to \overline{x}$ gibt es zu $\delta > 0$ ein $M > N$ so dass $|x_k - \overline{x}| < \delta,\ k \geq M$. Dann ist aber $n_k \geq k \geq M \geq N$, also $\frac{\varepsilon}{4} \leq f_{n_k}(x_k) < \frac{\varepsilon}{8}$.
□

**Satz 2.1.12** *$A(x) := \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R_A > 0,\ 0 \leq r < R_A$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ auf $[-r,r]$ absolut und gleichmäßig.*

**Folgerung 2.1.13** *$x \mapsto A(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ stetig auf $(-R_A, R_A)$*

**[HS]** $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

äq

(i) $f$ stetig

(ii) $f|[A,B]$ stetig für alle $[A,B] \subset (a,b)$.

**Theorem 2.1.14 (Abelscher Grenzwertsatz)**
*$A(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ konvergent für $|x| < 1$, $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ konvergent und $\tilde{A} : (-1,1] \to \mathbb{R}$ die Abbildung*

$$\tilde{A}(x) := \begin{cases} A(x) & |x| < 1 \\ \sum\limits_{n\geq 0} a_n & x = 1 \end{cases}$$

*Dann ist $\tilde{A} : (-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig.*

**EX:**

$A(x) = \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ konvergent für $-1 < x \leq 1$, divergent für $x = -1$; $A$ stetig auf $(-1,1]$.

**[HS]** $(\sigma_n)$ Nullfolge. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C \geq 0$ so dass

$$\left|\sum_{n\geq 0} \sigma_n x^n\right| \leq C + \frac{\varepsilon}{1 - |x|},\ |x| < 1.$$

*Beweis des HS:* $\sum\limits_{n\geq 0} \sigma_n x^n$ hat einen Konvergenzradius $\geq 1$. Für $|x| < 1$ hat man also absolute Konvergenz. Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N$ so dass $|\sigma_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also

$$\left|\sum_{n\geq 0} \sigma_n x^n\right| \leq \sum_{n\geq 0} |\sigma_n||x|^n \leq \sum_{n\leq N} |\sigma_n||x|^n + \varepsilon \sum_{n\geq N} |x|^n \leq \sum_{n\leq N} |\sigma_n| + \frac{\varepsilon}{1-|x|}.$$

□

*Beweis des AGWS:* $s_n := \sum\limits_{k\leq n} a_k$. $(s_n)$ ist beschränkt, $s := \lim s_n$. Die Potenzreihe $\sum\limits_{n\geq 0} s_n x^n$ hat einen Konvergenzradius $\geq 1$,

$$A(x) = (1-x) \cdot \sum_{n\geq 0} s_n \cdot x^n$$

$$S = (1-x) \cdot \sum_{n\geq 0} s \cdot x^n.$$

Daher ist für $|x| < 1$

$$\tilde{A}(x) - \tilde{A}(1) = A(x) - s = (1-x) \sum_{n\geq 0} (s_n - s) x^n,$$

also für $0 < x < 1$

$$\tilde{A}(x) - \tilde{A}(1) \leq (1-x)\left(C + \frac{\varepsilon}{1-x}\right),\ C = C_\varepsilon.$$

Ist $0 < x < 1,\ |x-1| < \delta := \frac{\varepsilon}{C+1}$ so ist $|\tilde{A}(x) - \tilde{A}(1)| < 2\varepsilon$. □