Kapitel 3

Integrierbare Funktionen

3.0 Regelfunktionen

Definition 3.0.0 *:* 15/01/00

$T : [a, b] \to \mathbb{R}, \;\; f : [a, b] \to \mathbb{R}$

(1) *T Treppenfunktion auf $[a, b]$:$\Leftrightarrow$ Es gibt eine Partition $p : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ sowie $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ so dass $T(x) = y_i$ für alle $t_{i-1} < x < t_i$.*

(2) *f Regelfunktion auf $[a, b]$:$\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge (T_n) von Treppenfunktionen auf $[a, b]$, so dass $T_n \underset{\|\,\|}{\longrightarrow} f$.*

$T[a, b]$ bzw. $R[a, b]$ bezeichnet die Menge der Treppen- bzw. Regelfunktionen auf $[a, b]$.

EX: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \text{ irrational} \\ \frac{1}{p+q} & x = \frac{p}{q}, \;\; p, \;\; q \geq 0, \;\; q \neq 0, \;\; ggT(p, q) = 1 \end{cases}$$

$f \in R[0, 1]$.

Denn: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele rationale Zahlen $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$, so dass $f(x_i) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Definiere für $0 \leq x \leq 1$

$$T(x) := \begin{cases} f(x) & x = x_i \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Dann gilt $T \in T[0, 1]$ und $||T - f|| < \varepsilon$.

Bemerkung 3.0.1 :

[1] $\mathbb{R} \subset T[a,b] \subset R[a,b] \subset B[a,b]$.

[2] $R[a,b]$ *ist eine* $\mathbb{R}$*-Algebra. Mit f,g gehört auch* $f \bigwedge\!\!\bigvee g, |f|$ *zu* $R[a,b]$.

[3] $[A,B] \subset [a,b], f \in R[a,b] \Rightarrow f|[A,B] \in R[A,B]$

[4] $a < c < b,\ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *so dass* $f|[a,c], f|[c,b]$ *Regelfunktion. Dann ist* $f \in R[a,b]$.

Satz 3.0.2 :
$f_n \in R[a,b], n = 0,1,2,3,\ldots$

äq
(i) (f_n) $\|\ \|$*-Cauchy-Folge*
(ii) *Es gibt ein* $f \in R[a,b]$ *so dass* $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f$.

Beweis :
$(ii) \Rightarrow (i)$: ✓
$(i) \Rightarrow (ii)$: Es gibt ein $f \in B[a,b]$, so dass $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f$. Sei $\varepsilon > 0$. Zunächst gibt es Treppenfunktionen T_n, so dass $||T_n - f_n|| < \frac{1}{n}$. Für $n \geq N$ geeignet ist $||f - T_n|| \leq ||f - f_n|| + ||T_n - f_n|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. □

Theorem 3.0.3 : $C[a,b] \subset R[a,b]$.

Beweis :Œ $a < b$. Für $\varepsilon > 0$ sei
$M := \{\tau \in [a,b] |$ es gibt ein $T \in T[a,\tau]$ so dass $||T - f|[a,\tau]|| < \varepsilon\}$.
Da f stetig, gibt es ein $0 < \delta$ so dass $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $|x - a| < 2\delta,\ x \in [a,b]$. Sei Œ $a + \delta \leq b$. Definiere für $a \leq x \leq a + \delta$ $T(x) := f(a)$. Dann ist $T \in T[a, a+\delta]$ und $||T - f|[a, a+\delta]|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ d.h. $[a, a+\delta] \subset M$. Daher existiert $\tau_0 := sup\ M, a < \tau_0 \leq b$. Sei $0 < \delta'$, so dass $|f(x) - f(\tau_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $|x - \tau_0| < \delta',\ x \in [a,b]$. Wähle $0 < \eta < \delta'$, so dass $a < \tau_0 - \eta$, und wähle $T \in T[a, \tau_0 - \eta]$ so dass $||f|[a, \tau_0 - \eta] - T|| < \varepsilon$. Definiere $\widetilde{T} : [a, \tau_0 + \eta] \to \mathbb{R}$ durch

$$\widetilde{T}(x) := \begin{cases} T(x) & a \leq x \leq \tau_0 - \eta \\ f(\tau_0) & \tau_0 - \eta < x \leq \tau_0 + \eta. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{T} \in T[a, \tau_0 + \eta]$ und $||\widetilde{T}\big|[a, \tau_0 + \eta] \cap [a,b] - f\big|[a, \tau_0 + \eta] \cap [a,b]|| < \varepsilon$, also $\tau_0 + \eta > b$. □

Mit derselben Methode folgt

Theorem 3.0.4 *:*
Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.

Beweis :Œ $f \nearrow$. Definiere für $x \in (a,b)$
$f(x+) := inf\ \{f(y)|x < y\}$ und
$f(x-) := sup\ \{f(y)|y < x\}$ und analog
$f(a+)$ bzw. $f(b-)$.
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der Monotonie ein $\delta > 0$, so dass $a + \delta \leq b$ und $f(a+) \leq f(x) < f(a+) + \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $a < x \leq a + \delta$. Definiere für $a \leq x \leq a + \delta$ die Funktion

$$T(x) := \begin{cases} f(a) & x = a \\ f(a+) & a < x \leq a + \delta. \end{cases}$$

Dann ist $T \in T[a, a+\delta]$, $\left\| f \middle| [a, a+\delta] - T \right\| < \varepsilon$.
$a < \tau_0 := sup\ M \leq b$. Wähle $\eta > 0$, so dass $a \leq \tau_0 - \eta$ und

$$f(\tau_0-) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) \leq f(\tau_0-)$$

für alle $\tau_0 - \eta < x \leq \tau_0$ bzw.

$$f(\tau_0+) \leq f(x) < f(\tau_0+) + \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $\tau_0 < x \leq \tau_0 + \eta$, $x \in [a,b]$ und $T \in T[a, \tau_0 - \eta]$ so dass $\left\| f \middle| [a, \tau_0 - \eta] - T \right\| < \varepsilon$. Definiere $\widetilde{T} : [a, \tau_0 + \eta] \to \mathbb{R}$ durch

$$\widetilde{T}(x) := \begin{cases} T(x) & a \leq x \leq \tau_0 - \eta \\ f(\tau_0-) & \tau_0 - \eta < x < \tau_0 \\ f(\tau_0) & x = \tau_0 \\ f(\tau_0+) & \tau_0 < x \leq \tau_0 + \eta \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{T} \in T[a, \tau_0 + \eta]$ und $||f\big|[a, \tau_0 + \eta] \cap [a,b] - \widetilde{T}\big|[a, \tau_0 + \eta] \cap [a,b]|| < \varepsilon$, d.h. $\tau_0 + \eta > b$. $\square$

WARNUNG:

Die Komposition $f \circ g$ zweier Regelfunktionen f, g ist i.a. keine Regelfunktion.

$$g(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \cdot \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und daher $g \in R[0,1]$.

$$\text{sign}(y) := \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & 0 = x \\ -1 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

ist eine Treppenfunktion auf $[-1,1]$, aber sign $\circ\, g$ ist keine Regelfunktion.

Satz 3.0.5 *:*
$f \in R[a,b],\ h \in C[A,B],\ \eta > 0$, so dass bild $f \subset [A+\eta, B-\eta]$.
Dann ist $h \circ f \in R[a,b]$.

EX: $f \in R[a,b],\ C > 0$ so dass $f(x) \geq C$ für alle $x \in [a,b]$.
Dann ist $\sqrt{f} \in R[a,b]$.

[HS] $g : [A,B] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon \text{ für alle } |x - y| < \delta,\ \ x,\ y \in [A,B].$$

(g ist „gleichmäßig" stetig!).

Beweis : Sonst gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, für das gilt: Zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es $x_n, y_n \in [A,B]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, aber $|g(x_n) - g(y_n)| \geq \varepsilon_0$.
Œ $x_n \to \overline{x},\ y_n \to \overline{y}$. Wegen $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ist $\overline{x} = \overline{y} \in [A,B]$. Da g stetig, konvergiert $|g(x_n) - g(y_n)| \geq \varepsilon_0$ gegen $|g(\overline{x}) - g(\overline{y})| = 0$, ein Widerspruch. □

Beweis des Satzes:
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so dass $|h(z) - h(z')| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $|z - z'| < \delta,\ \ z, z \in [A,B]$. Zu $0 < \eta' < min\ \{\delta, \eta\}$ gibt es $T \in T[a,b]$ mit $||T - f|| < \eta'$, insbesondere

$$A \leq f(x) - \eta' < T(x) < f(x) + \eta' \leq B$$

für alle $x \in [a,b]$. Deshalb ist zunächst $h \circ T$ definiert, $h \circ T \in T[a,b]$ und $||h \circ f - h \circ T|| < \varepsilon$ □

Ergänzung 3.0.6 *(nicht Teil der VL)*

$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \ x \in [a, b)$.

Existiert für jede Folge $x_n \in [a, b]$, $x_n > x$, $x_n \to x$ *der Limes* $\lim f(x_n)$ *und stimmen alle diese Limiten überein, so heißt*

$$f(x+) := \lim f(x_n) \text{ der „rechtseitige" Limes von } f \text{ in } x.$$

Analog wird der „linksseitige" Limes $f(x-)$ *von* f *in* $x \in (a, b]$ *definiert.*

Beispielsweise gilt:

$$f \text{ stetig in } x \in (a, b) \text{ genau dann, wenn } f(x) = f(x+) = f(x-).$$

Kriterium:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

äq
(i) $f \in R[a, b]$
(ii) $f(x+)$ *existiert für alle* $x \in [a, b)$ *und* $f(x-)$ *existiert für alle* $x \in (a, b]$.

EX: *Die Dirichlet*[1] *- Funktion*

$D : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$D(x) := \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases}$$

ist keine Regelfunktion.

[1] 1805 - 1859, deutscher Zahlentheoretiker