3.1 Regelintegral

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion, $p : a = t_0 < t, < \dots < t_n = b$ Teilung von $[a,b]$ so dass

$$\varphi\Big|(t_{k-1}, t_n) = constant$$

für $k = 1, .., n$ („ φ-Teilung").

Definition 3.1.0
$I_p(\varphi) := \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right)(t_k - t_{k-1})$ heißt Integral von φ bzgl. p über $[a,b]$.

Lemma 3.1.1
p, p' $\varphi-$Teilungen von $[a,b]$. Dann ist $I_p(\varphi) = I_{p'}(\varphi)$.

Beweis : $p \cup p'$ verfeinert p und p'.
Induktion nach $\#(p \cup p' - p) : I_p(\varphi) = I_{p\cup p'}(\varphi)$. □

Die von der Teilung p unabhängige reelle Zahl 18/01/00

$$I(\varphi) := \int_a^b \varphi(x)dx := I_p(\varphi)$$

heißt **das Integral von** φ **über** $[a,b]$.

Rechenregeln 3.1.2
$\varphi, \psi \in T[a,b],\ \lambda \in \mathbb{R},\ a \le c \le b.$

(1) $I(\varphi + \psi) = I(\varphi) + I(\psi)$

(2) $I(\lambda \cdot \varphi) = \lambda \cdot I(\varphi)$

(3) $I(\varphi) \ge 0$, *falls* $\varphi \ge 0$
Insbesondere
$|I(\varphi)| \le I(|\varphi|) \le ||\varphi||(b-a).$

(4) $I(\varphi) = 0$, *falls* $\#\{x \mid \varphi(x) \ne 0\} < \infty$

(5) $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \int\limits_a^c \varphi(x)dx + \int\limits_c^b \varphi(x)dx.$

Satz 3.1.3
$f \in \mathbb{R}[a,b],\ \varphi_n, \psi_n \in T[a,b],\ n = 0,1,2,3,...$ *so dass* $\varphi_n, \psi_n \underset{||\ ||}{\longrightarrow} f$.
Dann existieren die Limiten

$$\lim I(\varphi_n),\ \lim I(\psi_n)$$

und stimmen überein:

$$-||f||(b-a) \leq \lim I(\varphi_n) = \lim I(\psi_n) \leq ||f||(b-a).$$

Beweis : $|I(\varphi_n) - I(\psi_m)| = |I(\varphi_n - \psi_m)| \leq ||\varphi_n - \psi_m||(b-a)$.
Daher ist sowohl $(I(\varphi_n))$ als auch $(I(\psi_n))$ eine CF reeller Zahlen;
$\lim I(\varphi_n) = \lim I(\psi_n)$.
Wegen $-||\varphi_n||(b-a) \leq I(\varphi_n) \leq ||\varphi_n||(b-a)$ und $||\varphi_n|| \to ||f||$ folgt die Abschätzung. □

Die von der approximierenden Folge (φ_n) unabhängige reelle Zahl $\lim I(\varphi_n)$ heißt **das Regelintegral**

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx := \lim I(\varphi_n)$$

von f über $[a,b]$.

EX:

[1] $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \text{ irrational} \\ \frac{1}{p+q} & x = \frac{p}{q},\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1,\ p,q \geq 0 \end{cases}$$

Es gibt eine Folge φ_n von Treppenfunktionen, so dass

(1) $\varphi_n \underset{||\ ||}{\longrightarrow} f$

(2) $\#\{x \mid \varphi_n(x) \neq 0\} < \infty$,

also $I(f) = \lim I(\varphi_n) = 0$.

[2] $0 < a \le b,\ \alpha \in \mathbb{R},\ f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^\alpha$

$$\text{Ⓢ} \quad \int_a^b f(x)dx = \begin{cases} log\ b - log\ a & \alpha = -1 \\ \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+a}) & \alpha \neq -1 \end{cases}$$

Folgerung: $\log y = \int_1^y \frac{dx}{x},\ y \ge 1.$

Beweis der Folgerung:

$q := \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \ge 1,\ t_k := aq^k, a = t_0 < t_1 < .. < t_k = b.$

$\varphi_n(x) := \begin{cases} f(t_k) & x \in [t_k, t_{k+1}) \\ b^\alpha & x = b \end{cases}$

$||f - \varphi_n|| \le ||f|| \left| \sqrt[n]{(\frac{b}{a})^\alpha} - 1 \right| \to 0$, also

$$\begin{aligned} I(f) &= \lim I(\varphi_n) \\ &= \lim \begin{cases} n(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1) & \alpha = -1 \\ a^{\alpha+1} \cdot (q-1) \cdot \frac{q^{n\cdot(\alpha+1)}-1}{q^{(\alpha+1)}-1} & \alpha \neq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \log b - \log a & \alpha = -1 \\ \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) & \alpha \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Beachte: $\alpha \neq -1$

$$a^{\alpha+1} \cdot (q-1) \cdot \frac{q^{n(\alpha+1)}-1}{q^{\alpha+1}-1} = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \cdot \frac{n\left(\sqrt[n]{(\frac{b}{a})}-1\right)}{n\left(\sqrt[n]{(\frac{b}{a})^{\alpha+1}}-1\right)}$$

Der Quotient konvergiert gegen

$$\frac{\log(\frac{b}{a})}{\log(\frac{b}{a})^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

□

Satz 3.1.4

Die Abbildung $I : R[a,b] \to \mathbb{R},\ f \mapsto I(f)$, hat folgende Eigenschaften:

I1: I $\mathbb{R}$-linear, d.h. $I(f+g) = I(f) + I(g),\ I(\lambda f) = \lambda \cdot I(f),\ \lambda \in \mathbb{R}$

I2: I positiv, d.h. $I(f) \ge 0$ für alle $f \ge 0$

I3: I additiv, d.h. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ für alle $a \le c \le b$.

Beweis : $I1$ und $I3$ gilt für Treppenfunktionen, also aufgrund der Stabilitätseigenschaften konvergenter Folgen auch für Regelfunktionen.

I2: Ist $\varphi_n \underset{|| \, ||}{\longrightarrow} f = |f|$, so ist $|\varphi_n| \underset{|| \, ||}{\longrightarrow} f$, also $I(f) = \lim I(|\varphi_n|) \ge 0$. □

Bemerkung 3.1.5
Für $b \le a$ definiert man

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx.$$

Dann gilt für je drei reelle Zahlen a, b, c

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(falls die Integrale definiert sind).

Folgerung 3.1.6
$I : R[a,b] \to \mathbb{R}$ *monoton, d.h.*

$$I(f) \le I(g) \text{ falls } f \le g.$$

Insbesondere: $|I(f)| \le I(|f|) \le ||f||(b-a).$

Folgerung 3.1.7
$I : R[a,b] \to \mathbb{R}$*stetig, d.h.*

$$I(f_n) \to I(f) \text{ falls } f_n \underset{|| \, ||}{\longrightarrow} f.$$

Theorem 3.1.8
Sei $\mu : R[a,b] \to \mathbb{R}$ derart, dass

(1) μ $\mathbb{R}$*-linear*

(2) $\mu \ge 0$

(3) $\mu\left(\chi_{[A,B]}\right) = B - A$ *für alle* $[A,B] \subset [a,b]$.

Dann ist $\mu = I$.

Beweis : Auf $T[a,b]$ ist $\mu = I$.
Da μ stetig, ist

$$\mu(f) = \lim \mu(\varphi_n) = \lim I(\varphi_n) = I(f), \text{ falls } \varphi_n \underset{|| \, ||}{\longrightarrow} f, \ \varphi_n \in T[a,b].$$

□

Theorem 3.1.9
$f \in R[a,b]$. Dann ist die Abbildung

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

gleichmäßig stetig in $[a,b]$.

Zusatz: *Ist f stetig in $\overline{x} \in [a,b]$, so ist*

$$\lim \frac{F(x_n) - F(\overline{x})}{x_n - \overline{x}} = f(\overline{x})$$

für alle $x_n \to \overline{x}$, $x_n \in [a,b]$, $x_n \neq \overline{x}$.

Beweis : $x, y \in [a,b]$,
$|F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)dt| \leq ||f||\ |y-x|$.
$\left|\frac{F(x)-F(\overline{x})}{x-\overline{x}} - f(\overline{x})\right| = \frac{1}{|x-\overline{x}|}\left|\int_{\overline{x}}^{x}(f(t) - f(\overline{x}))dt\right| \leq \sup|f(t) - f(\overline{x})|$
wobei $x \neq \overline{x}$, $t \in [x, \overline{x}]$ bzw. $t \in [\overline{x}, x]$. □

EX: $a \leq b, n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b t^n dt = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

$t \mapsto t^n$ gerade für $n \equiv 0(2)$, ungerade für $n \equiv 1(2)$. Daher Œ $a = 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^b t^n dt &= \lim \int_{x_m}^b t^n dt,\ 0 < x_m \to 0 \\ &= \lim \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - x_m^{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} b^{n+1}.\end{aligned}$$

Satz 3.1.10
$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R_A > 0$.
Dann ist

$$\int_a^b A(x)dx = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

für alle $[a,b] \subset (-R_A, R_A)$.

EX:

[1] $\int\limits_a^b \begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \exp\end{matrix}\ (x)dx = \begin{cases} -(\cos b - \cos a) \\ \sin b - \sin a \\ \exp b - \exp a \end{cases}$

[2] $0 < \Delta < 1$. Für $x \in [1-\Delta, 1+\Delta]$
konvergiert $\frac{1}{x} = \sum\limits_{n\geq 0} (1-x)^n$ gleichmäßig, also

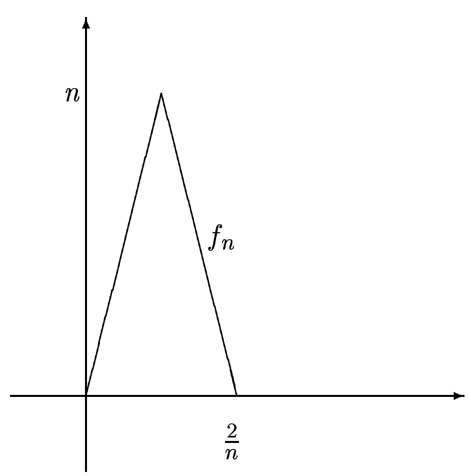
$$\log(1+y) = \int\limits_1^{1+y} \frac{dx}{x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}, \quad |y| < 1.$$

insbesondere:
$\log 2 = \sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ nach dem Abelschen Grenzwertsatz.

Bemerkung 3.1.11

$f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} f, \quad f_n, f \in R[a,b] \quad \underset{i.a.}{\not\Rightarrow} \quad I(f_n) \to I(f)$

Gegenbeispiel:



$$f_n \underset{ptw}{\longrightarrow} 0, \text{aber } I(f_n) = 1.$$

Theorem (Arzela[1]-Osgood [2], ohne Beweis)
$f_n, f \in R[a,b], c \geq 0$ so dass

(1) $f_n \underset{ptw.}{\longrightarrow} f$

(2) $|f_n| \leq c$ *für alle* $n \geq 0$

Dann ist $\lim I(f_n) = I(f)$.

Satz 3.1.12
$f, g \in R[a,b]$ so dass $\{x \big| f(x) \neq g(x)\}$ höchstens abzählbar.
Dann ist $I(f) = T(g)$.

Beweis : $h = |f - g|, \quad \{x|h(x) \neq 0\} = \{x_0, x_1, ...\}$ paarweise verschieden.

$$h_n := \sum_{k \leq n} h(x_k)\chi_{x_k} \leq ||h||$$

$|I(f) - I(g)| \leq I(|f - g|) = \lim I(h_n) = 0.$ □

Satz 3.1.13 ***(Mittelwertsatz der Integralrechnung)***
$f, g \in R[a,b], \quad g \geq 0.$
Dann gibt es ein $c \geq 0$, so dass

(1) $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) \leq c \leq \sup\limits_{x \in [a.b]} f(x)$

(2) $I(f \cdot g) = c \cdot I(g)$

Folgerung 3.1.14
Ist f stetig, so gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so dass $I(f) = f(\xi)(b - a)$.

EX: $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
Insbesondere ist sin bzw. cos gleichmäßig stetig.

---
[1]Cesare Arzela (1847 - 1912), ital. Mathematiker
[2]William Fogg Osgood (1864 - 1943), amer. Mathematiker

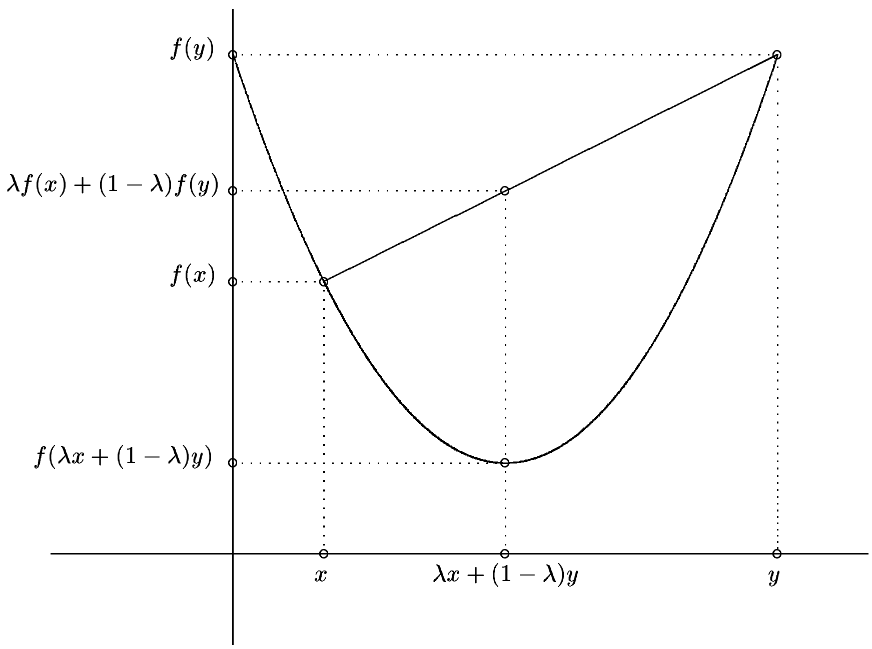
Definition 3.1.15

$\emptyset \neq I$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$

(1) f konvex $:\Leftrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x)$
für alle $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$.

(2) f konkav $:\Leftrightarrow -f$ konvex.

Graph einer konvexen Funktion f:



Satz 3.1.16
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion,
$F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$.

(1) $f \geq 0 \Rightarrow F \nearrow$

(2) $f \nearrow \Rightarrow F$ konvex.

EX:

[1] exp konvex, log konkav

[2] $a_1, .., a_n > 0$
$a_i = \log y_i$
$\sqrt[n]{a_1 \cdot .. \cdot a_n} = \exp \frac{1}{n}(y_1 + .. + y_n) \leq \frac{a_1 + .. + a_n}{n}$

Beweis von 3.1.16:

(1) $x \leq y : F(y) - F(x) = \int\limits_x^y f(t)dt \geq 0.$

(2) $x \leq \lambda x + (1-\lambda)y \leq y,\ z := \lambda x + (1-\lambda)y.$
Œ$f \geq 0$.

$$F(z) = \int\limits_a^z f(t)dt$$
$$= \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) + \lambda \int_x^z f(t)dt + (1-\lambda) \int\limits_z^y f(t)dt$$
$$\lambda \int\limits_x^z f(t)dt - (1-\lambda) \int\limits_z^y f(t)dt \leq \lambda f(z)(z-x) - (1-\lambda)f(z)(y-z) = 0.$$

□

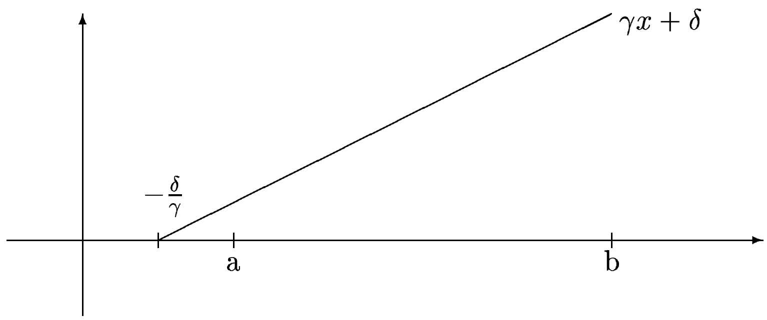
[HS]
$a \leq b$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, so dass

(1) $\Delta := det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} := \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$

(2) $-\frac{\delta}{\gamma} \notin [a,b]$, *falls* $\gamma \neq 0$.

Dann ist
$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R},\ \varphi(x) := \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$
stetig und
streng monoton wachsend, falls $\Delta > 0$, *bzw.*
streng monoton fallend, falls $\Delta < 0$.

Beweis :



$$\varphi(x) = \varphi(y) = \frac{\Delta(x-y)}{(\gamma y+\delta)(\gamma y+\delta)}.$$

In $[a,b]$ hat $\gamma x + \delta$ stets dasselbe Vorzeichen! $\square$

Theorem 3.1.17
φ wie im [HS], $[A,B] = bild\varphi$, d.h.$\{A,B\} = \{\varphi(a), \varphi(b)\}$,
$f \in R[A,B]$.
Dann ist

(1) $f \circ \varphi \in R[a,b]$

(2) $\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int\limits_a^b f \circ \varphi(x) \cdot \frac{\Delta}{(\gamma(x)+\delta)^2} dx.$

Beweis : $\gamma x + \delta \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$.
Da φ streng monoton ist, ist $T \circ \varphi \in T[a,b]$ für alle $T \in T[A,B]$,
$||f \circ \varphi - T \circ \varphi|| = ||f - t||$.
Œ$\varphi \nearrow$:
$\mu_1,\ \mu_2 :\ R[A,B] \to \mathbb{R}$,
$\mu_1(f) := \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy, \quad \mu_2(f) := \int\limits_a^b f \circ \varphi(x) \frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2} dx.$
μ_1, μ_2 sind $\mathbb{R}$-linear und positiv. Daher genügt es zu zeigen, dass

$$\mu_1(\chi_{[A',B']}) = \mu_2(\chi_{[A',B']})$$

für alle $[A',B'] \subset [A,B]$.
Zu $A \leq A' \leq B' \leq B$ gibt es 1-deutig bestimmte $a \leq a' \leq b' \leq b$, so dass $A' = \varphi(a')$, $B' = \varphi(b')$.

Dann ist

$\mu_1(\chi_{[A',B']}) = B' - A'$,

$\mu_2(\chi_{[A',B']} = \int\limits_{a'}^{b'} \frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2} dx$.

$p : a' = t_0 < t_1 < .. < t_n = b'$, so dass $t_{k+1} - t_k = \frac{b'-a'}{n}$.

Definiere Treppenfunktion

$T_n : [a', b'] \to \mathbb{R}$,

$T_n(x) := \begin{cases} \frac{\Delta}{(\gamma t_k+\delta)^2} & x \in [t_k, t_{k+1}) \\ \Delta(\gamma b' + \delta)^2 & x = b'. \end{cases}$

$T_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} (x \longmapsto \frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2})$ auf $[a', b']$, d.h.

$\int\limits_{a'}^{b'} \frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2} dx = \lim I(T_n)$.

$I(T_n) - (B' - A') = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\Delta}{(\gamma t_k+\delta)^2}(t_{k+1} - t_k) - \sum\limits_{k=0}^{n} (\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))$

Wegen

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \frac{\Delta(t_{k+1} - t_k)}{(\gamma t_{k+1} + \delta)(\gamma t_k + \delta)}$$

ist daher

$$|I(T_k) - (B' - A')| \le const \sum_{k=0}^{n} (t_{k+1} - t_k)^3 \le const \frac{1}{n}.$$

□

EX: $x > 0, L(x) := \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$.

Mit $\varphi(y) := xy$ folgt $L(xy) = L(x) + L(y)$

Ausserdem ist $L(x) \le x - 1$.

Ⓢ *$L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ so dass*

(1) $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$

(2) $L(x) \le x - 1$

Dann ist $L = \log$.

Beweis : Wegen der Additivität ist $L(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}L(x), \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
Wegen $L(x) \leq x - 1$ ist

$$n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) \leq -L\left(\frac{1}{x}\right) = L(x) = nL\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \leq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right),$$

also $L(x) = \log x$. $\square$