3.2 Elementare Funktionen: arctan

Satz 3.2.0
$x \longmapsto \arctan(x) := \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ *ist eine gleichmäßig stetige, streng monoton wachsende Funktion auf* $\mathbb{R}$ *mit*

(1) $\arctan \begin{cases} \textit{konvex} & x < 0 \\ \textit{konkav} & x > 0 \end{cases}$

(2) $\arctan \begin{cases} > 0 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ < 0 & x < 0 \end{cases}$

[HS] $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f \geq 0, I(f) = 0$.
Dann ist $f = 0$.
Insbesondere ist $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)dt$ streng monoton wachsend, falls $f > 0$.

Theorem 3.2.1
$\alpha := 2 \cdot \arctan(1)$.

(1) $\arctan(x) + \arctan(-x) = 0$

(2) $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \alpha \cdot \operatorname{sign}(x), \quad x \neq 0$

(3) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}), \quad xy < 1$

Folgerung 3.2.2
$xy > 1$
$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}) + \alpha(\operatorname{sign} x + \operatorname{sign} y)$.

Beweis :

(1): $\varphi(t) := -t$

(2): $\varphi(t) := \frac{1}{t}$

(3): $xy < 1, \quad y$ fest, $\quad \varphi(t) := \frac{t+y}{1-ty}$.

$\arctan(\frac{x+y}{1-xy}) = \arctan(y) + \int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{dt}{1+t^2}$.

$\int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^x \frac{1}{1+\varphi(s)^2} \cdot \frac{\Delta}{(1-sy)^2} ds = \int\limits_0^x \frac{ds}{1+s^2} = \arctan(x)$. $\square$

Folgerung 3.2.3

$$\arctan x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

Beweis : $\frac{1}{1+t^2} = \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n t^{2n}$, $|t| < 1$, und Abelscher Grenzwertsatz. □

Satz 3.2.4

$$\mathit{bild}(\arctan) = (-\alpha, \alpha)$$

Beweis :
Ist $x > 0$, so ist $0 < \arctan(x) < \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \alpha$, d.h.

$$\arctan(\mathbb{R}) \subset (-\alpha, \alpha), \quad \alpha > \varepsilon > 0.$$

Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\arctan(x) < \varepsilon$ für alle $|x| < \delta$. Für $0 < x < \delta$ ist dann $\arctan(\frac{1}{x}) > \alpha - \varepsilon$. Nach dem ZWS ist daher

$$[\alpha + \varepsilon, \alpha - \varepsilon] \subset \mathit{bild}(\arctan) \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Daraus folgt $(-\alpha, \alpha) \subset \mathit{bild}(\arctan)$. □

Die Additionstheoreme des cos und sin liefern für den tan

(1) $\tan(x + \pi) = \tan(x), \ x \notin \mathbb{Z} \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$

(2) $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) \cdot \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$

(3) $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

(4) $\tan(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \mathbb{R}$

Denn aus $2 \cos x \sin y = \sin(x + y) + \sin(y - x)$
folgt $2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = 1 = \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4}$, d.h.

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Satz 3.2.5

$$\arctan \circ \tan \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} = \mathrm{id}_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$$

Beweis :

$$(-\alpha, \alpha) \overset{\chi}{\twoheadrightarrow} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \overset{\tan}{\twoheadrightarrow} \mathbb{R} \overset{\arctan}{\twoheadrightarrow} (-\alpha, \alpha).$$

Die Komposition $\varphi := \arctan \circ \tan \circ \chi$ hat folgende Eigenschaften:

(1) φ stetig, surjektiv, ungerade

(2) $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$

(3) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad x, y \in [0, \frac{\alpha}{2})$.

Aus der Additivität folgt $\varphi(x \cdot \frac{\alpha}{2}) = x \cdot \frac{\alpha}{2}$ für alle $0 \leq x < 1$, d.h. $\varphi = id_{(-\alpha,\alpha)}$.
Insbesondere ist $\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ streng monoton wachsend, da
$\tan(0) = 0, \ \tan(1) = \frac{\pi}{4}$.
Schließlich folgt aus

$$\frac{y}{1+y^2} \leq \arctan(y) \leq y, \quad 0 < y$$

$$\lim \frac{\arctan(y_n)}{y_n} = 1, \quad y_n \to 0, \quad y_n > 0$$

und mit $y_n = \tan \frac{\pi x_n}{2\alpha}, \quad x_n > 0$

$$1 = \lim \frac{x_n}{\tan \frac{\pi x_n}{2\alpha}} = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \lim \frac{\frac{\pi x_n}{2\alpha}}{\sin \frac{\pi x_n}{2\alpha}} \cdot \cos \frac{\pi x_n}{2\alpha} = \frac{2\alpha}{\pi}$$

d.h. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. □

Folgerung 3.2.6

(1) $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(2) $\tan \circ \arctan = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.