## 4.1 Stammfunktionen

**Definition 4.1.0** *:*
*$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f, F : I \to \mathbb{R}$.*

*$F$ Stammfunktion $f$ :⇔*

*(1) $F$ stetig*

*(2) Es gibt eine höchstens abzählbare Menge $A \subset I$, so dass $F$ in jedem Punkt von $I \setminus A$ linear approximierbar ist und*
$$DF(x) = f(x) \text{ für alle } x \notin A.$$

**Lemma 4.1.1** *:*
*$F, \widetilde{F}$ Stammfunktionen von $f$.*
*Dann ist $\widetilde{F} = F + const.$*

*Beweis :* allgemeiner Mittelwertsatz. □

**Definition 4.1.2** *:*
*$f : I \to \mathbb{R}$ lokale Regelfunktion :⇔ $f\big|[a,b]$ Regelfunktion für alle $[a,b] \subset I$.*

Offenbar sind die stetigen Funktionen $C(I)$ und die monotonen Funktionen $Mon(I)$ Teilmenge der $\mathbb{R}$-Algebra $R_{loc}(I)$ der lokalen Regelfunktionen auf I. Ist $I = [a,b]$, so ist $R[a,b] = R_{loc}[a,b]$.

**[HS]** Eine lokale Regelfunktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Bemerkung: Die Umkehrung ist i.a. falsch.

*Beweis des (HS):*

(1) Ist $M = \bigcup_{n \geq 0} M_n$ und jedes $M_n$ höchstens abzählbar, so ist auch M höchstens abzählbar:
$\varphi_n : \mathbb{N} \twoheadrightarrow M_n$ induziert eine Surjektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow M$, $(n,m) \rightarrowtail \varphi_n(m)$.
Durch Komposition mit einer Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ findet man eine Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow M$.

(2) Da $I = \bigcup_{n \geq o} [a_n, b_n]$, genügt es zu zeigen, dass eine Regelfunktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat.

(3) Sei $T_n \in T[a,b]$, $f \in R[a,b]$, so dass $T_n \xrightarrow[\|\ \|]{} f$, und sei $\overline{x} \in [a,b]$ derart, dass jedes $T_n$ stetig in $\overline{x}$.
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $||T_n - f|| < \frac{\varepsilon}{6}$, und ein $\delta > 0$, so dass $|T_N(x) - T_N(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{6}$ für alle $|x - \overline{x}| < \delta,\ x \in [a,b]$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\overline{x})| &\leq |f(x) - T_N(x)| + |T_N(x) - T_N(\overline{x})| + |T_N(\overline{x}) - f(\overline{x})| \\ &\leq 2\|f - T_n\| + |T_N(x) - T_N(\overline{x})| < \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. $f$ ist ebenfalls stetig in $\overline{x}$. Insbesondere sind die Unstetigkeitsstellen von $f$ eine Teilmenge der Unstetigkeitsstellen der $T_n$ und daher höchstens abzählbar.

□

**Theorem 4.1.3** ***(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)***

*$f : I \to \mathbb{R}$ lokale Regelfunktion,*
*$\overline{x} \in I$, $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int\limits_{\overline{x}}^{x} f(t)dt$.*
*Dann gilt*

*(1) F ist eine Stammfunktion von f.*

*(2) Für jede Stammfunktion G von f ist*

$$G\Big|_{\overline{x}}^{x} := G(x) - G(\overline{x}) = \int\limits_{\overline{x}}^{x} f(t)dt.$$

*Beweis :*
F ist stetig und bis auf eine höchstens abzählbare Menge differenzierbar, und dort ist $DF(x) = f(x)$. □

**Bezeichnung**: $C^1(I) := \{F : I \to \mathbb{R}\ |F$ differenzierbar, $DF$ stetig$\}$

**Folgerung 4.1.4** *:*
*Das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} C^1(I) & \xrightarrow[surjektiv]{D} & C(I) \\ \big\downarrow & & \big\uparrow \cong \\ C^1(I)/\mathrm{kern}D & = & C^1(I)/\mathbb{R} \end{array}$$

*Beweis :*
Nach dem Hauptsatz ist $D$ surjektiv, nach dem allgemeinen Mittelwertsatz kern $D = \mathbb{R}$. $\square$

**EX:**

[1] $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x) \sin x dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx}(\sin x) dx = \frac{1}{2} \sin^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$

[2] $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ differenzierbar, so dass $f' \in R[a,b]$.
Dann ist $\frac{f'}{f} \in R[a,b]$ und

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \int\limits_a^b \frac{d}{dx}(\log f(x)) dx \\ &= \log \circ f \Big|_a^b \\ &= \log \left( \frac{f(b)}{f(a)} \right).\end{aligned}$$

**Integrationsmethoden 4.1.5** *:*

[1] ***Partielle Integration***
*$u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar so dass $u', v'$ Regelfunktionen.*
*Dann ist $D(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$, d.h.*

$$u \cdot v \Big|_a^b = \int\limits_a^b u'(x) v(x) dx + \int\limits_a^b u(x) v'(x) dx$$

*oder*

$$\int\limits_a^b u'(x) v(x) dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int\limits_a^b u(x) v'(x) dx.$$

EX:

$$\int_a^b x \cdot \exp(x) dx.$$

Setze $u(x) := \exp(x), \quad v(x) := x.$

$$\begin{aligned}\int_a^b x \cdot \exp(x) dx &= \mathrm{id} \cdot \exp \Big|_a^b - \int_a^b \exp(x) dx \\ &= (\mathrm{id} - 1) \cdot \exp \Big|_a^b \\ &= (b-1)e^b - (a-1)e^a\end{aligned}$$

[2] ***Substitution***

*$f : I \to \mathbb{R}$ lokale Regelfunktion,*
*$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass*

(1) $\text{bild}\varphi \subset I$

(2) $x \longmapsto f \circ \varphi \cdot \varphi'(x)$ *Regelfunktion auf* $[a,b]$.

*$F$ Stammfunktion von $f$.*
*Dann ist*

$$\begin{aligned}(F \circ \varphi)' &= (f \circ \varphi) \cdot \varphi', \text{ d.h.} \\ (F \circ \varphi)\Big|_a^b &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_a^b (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)dx\end{aligned}$$

*EX:*

$$\int_a^b \frac{2x}{1+x^2}dx$$

Setze $\varphi(x) := 1 + x^2$, $\varphi'(x) = 2x$, *sowie*
$f(y) := \frac{1}{y}$.
Dann ist

$$f \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = \frac{2x}{1+x^2},$$

also

$$\int_a^b \frac{2x}{1+x^2}dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dy}{y} = log\ \frac{1+b^2}{1+a^2}.$$

**Definition 4.1.6** *:*

*$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ Intervall,*
*$f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge.*

*$(f_n)$ konvergiert lokal gleichmäßig* $:\Leftrightarrow (f_n\big|[a,b])$ *konvergiert gleichmäßig für alle* $[a,b] \subset I$.

Beispielsweise konvergiert jede Potenzreihe $A(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ lokal gleichmäßig in ihrem Konvergenzintervall $(-R_A, R_A)$, falls $R_A > 0$.

**Satz 4.1.7** *:*

*$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $\overline{x} \in I$,*
*$f_n :\to \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ differenzierbar, so dass*

(1) *$(f_n(\overline{x}))$ konvergent*

(2) *$f_n'$ lokale Regelfunktionen*

(3) *$(f_n')$ konvergiert lokal gleichmäßig.*

*Dann konvergiert die Folge $f_n$ lokal gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion f, und es gilt*

$$f' = lim\ f_n'$$

*d.h.*

$$(D \circ lim)(f_n) = (lim \circ D)(f_n).$$

Hinweis: Die Voraussetzung, dass $f_n'$ lokale Regelfunktionen sind, ist überflüssig: vgl. Dieudonné: Foundations of Modern Analysis 8.6.3

**WARNUNG:** Im allgemeinen ist $D \circ \lim \neq \lim \circ D$.

$f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$, $f_n \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} 0$, $f_n'(x) = \cos(nx)$. $f_n'$ konvergiert noch nicht einmal punktweise:

$$cos(\pi n) = \begin{cases} 1 & n \equiv 0(2) \\ -1 & n \equiv 1(2) \end{cases}$$

**Folgerung 4.1.8** *:*
*$\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ Reihe differenzierbarer Funktionen,*
*$\sum\limits_{n\geq 0} f_n'$ lokal gleichmäßig konvergente Reihe (lokaler Regelfunktionen),*
*$\sum\limits_{n\geq 0} f_n(\overline{x})$ konvergent für wenigstens ein $\overline{x} \in I$.*

*Dann*
*konvergiert $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ lokal gleichmäßig,*
*$\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ ist differenzierbar und*

$$\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)' = \sum_{n\geq 0} f_n'.$$

*Beweis von Satz 4.1.7:*
Es gibt eine lokale Regelfunktion g, so dass

$$f_n' \to g \text{ lokal gleichmäßig.}$$

Dann konvergiert auch die Folge $F_n$ der Stammfunktionen

$$F_n(x) := \int_{\overline{x}}^{x} f_n'(t)dt \text{ von } f_n' \text{ lokal gleichmäßig}$$

gegen die Stammfunktion $G(x) := \int\limits_{\overline{x}}^{x} g(t)dt$ von $g$, da

$$|F_n(x) - G(x)| \leq \left\| (f_n' - g)\big|_{[a,b]} \right\| (b-a)$$

für alle $x \in [a,b] \subset I$ und alle Intervalle $[a,b]$, die $\overline{x}$ enthalten.

$$f_n = F_n + f_n(\overline{x})$$

konvergiert daher lokal gleichmäßig gegen

$$f := G + \lim f_n(\overline{x}).$$

A priori ist $G$ und damit $f$ stetig und bis auf eine höchstens abzählbare Menge A differenzierbar und damit

$$f'(x) = G'(x) = g(x) = \lim f_n'(x) \quad \text{für alle } x \notin A.$$

Tatsächlich ist G überall differenzierbar und $G'(x) = g(x)$ für alle $x \in I$.

Seien $x_0, \overline{x} \in [a,b] \subset I$. Für $x \in [a,b],\ x \neq x_0$, ist dann

$$\begin{aligned}
&\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} - g(x_0) = \\
&\qquad \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(g(t) - f_n'(t) + f_n'(t) - f_n'(x_0) + f_n'(x_0) - g(x_0)\big)\, dt \\
&\qquad = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(g(t) - f_n'(t)\big)\, dt + \\
&\qquad + \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(f_n'(t) - f_n'(x_0)\big)\, dt + \\
&\qquad + \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(f_n'(x_0) - g(x_0)\big)\, dt
\end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} - g(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(g(t) - f_n'(t)\big)\,dt + \\ + \left(\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f_n'(x_0)\right) + \\ + \big(f_n'(x_0) - g(x_o)\big)$$

und somit

$$\left|\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right| \leq 2\left\|\big(g - f_n'\big)\,|_{[a,b]}\right\| + \\ + \left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f_n'(x_0)\right|$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es zunächst ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$2\left\|\big(g - f_n'\big)\,|_{[a,b]}\right\| < \frac{\varepsilon}{4},$$

und dazu dann ein $\delta > 0$, so dass

$$\left|\frac{f_N(x)-f_N(x_0)}{x-x_0} - f_N'(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

für alle $|x - x_0| < \delta$, $x \in [a,b]$, d.h. $G'(x_0) = g(x_0)$. □

**Satz 4.1.9** *:*
$A(x) := \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R_A > 0$.
*Dann hat auch die formal abgeleitete Potenzreihe*

$$A'_{form}(x) := \sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$$

*den Konvergenzradius* $R_A$,

*A ist differenzierbar in* $(-R_A, R_A)$ *und*

$A'(x) = A'_{form}(x)$ *für alle* $x \in (-R_A, R_A)$.

**EX:**

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

*Beweis von 4.1.9:*
Es genügt zu zeigen, dass $A'_{form}$ den Konvergenzradius $R_A$ hat.
Sei $R := \sup\{t \geq 0 \big| \left(na_n t^{n-1}\right)$ beschränkt$\}$, d.h. $R = R_{A'_{form}}$.
Sei $0 < t < R_A$. Wähle $\varepsilon > 0$ so dass $t < t(1+\varepsilon) < R_A$. Dann gibt es ein $C \geq 0$, so dass $|a_n t^n (1+\varepsilon)^n| \leq C$ für alle $n \geq 0$, also

$$\frac{C}{t} \geq |a_n t^{n-1}(1+\varepsilon)^n| \geq |a_n t^{n-1} \cdot n\varepsilon| \text{ nach Bernoulli}$$

und somit

$$|na_n t^{n-1}| \leq \frac{C}{t\varepsilon},$$

d.h $0 < t \leq R$, also $R_A \leq R$.
Ist umgekehrt $0 < t < R$, so gibt es ein $C$, so dass $|na_n t^{n-1}| \leq C$, d.h. $|a_n t^n| \leq C \cdot t$.
Daher ist auch $R \leq R_A$. □

**Definition 4.1.10** *:*
$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ *Intervall,* $f : I \to \mathbb{R}$

(1) $f^{(0)} := f, \quad f^{(1)} := f', \ \dots \ f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$, *falls existent.*

(2) $f$ *n-mal stetig differenzierbar* $:\Leftrightarrow$ $f^{(n)}$ *existiert und ist stetig.*

(3) $f$ $\infty$*-oft stetig differenzierbar* $:\Leftrightarrow$ $f^{(n)}$ *existiert für alle* $n \geq 0$.

*Für die n-te Ableitung* $f^{(n)}$ *schreibt man auch*

$$\frac{d^n}{dx^n} f \text{ oder } D^n f.$$

Durch Induktion beweist man leicht die sogenannte

$$\textbf{Leibniz-Regel}: \quad (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

**EX:**

[1] $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$f$ ist differenzierbar in $\mathbb{R}$, aber nicht stetig differenzierbar:

$$f'(x) := \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und $f'\left(\frac{1}{\pi n}\right) = \pm 1$.

[2] Sei $f : I \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar

$$\begin{array}{ll} & \text{äq} \\ (i) & f^{(0)} \text{ konvex} \\ (ii) & f^{(1)} \nearrow \\ (iii) & f^{(2)} \geq 0 \\ (iv) & f(x) \geq j^1_{\overline{x}} f(x) := f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) \end{array}$$

**Folgerung 4.1.11** *:*
$x \mapsto A(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ *ist in* $(-R_A, R_A)$ $\infty$*-oft differenzierbar, und es gilt*

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}.$$

**EX:**

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1.$$

Folglich $\log^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$

**Satz 4.1.12** ***(Taylorsche Formel)***
$\overline{x} \in I \subset \mathbb{R}$ *Intervall,* $f : I \to \mathbb{R}$ *(n+1)-mal stetig differenzierbar.*
*Dann ist für* $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\overline{x})}{k!}(x - \overline{x})^k + R_{n+1}(x)$$

*mit dem „Restglied“*

$$\mathbb{R}_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_{\overline{x}}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

*Beweis :*

Induktion:

$n = 0: \quad f(x) - f(\overline{x}) = \int\limits_{\overline{x}}^{x} f'(t)dt = R_1(x).$

Nach Induktion ist

$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{\overline{x}}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt.$

Partielle Integration liefert:

$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\overline{x})(x-\overline{x})^n + R_{n+1}(x).$ □

**Folgerung 4.1.13** *:*
*Es gibt eine Abbildung $\varepsilon : i \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(\overline{x})}{k!}(x-\overline{x})^k + \varepsilon(x)(x-\overline{x})^{x+1}$$

*mit $\varepsilon$ stetig in $\overline{x}$, $\varepsilon(\overline{x}) = 0$.*

*Beweis :* Definiere

$$\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & x = \overline{x} \\ \frac{1}{(x-\overline{x})^{n+1}} R_{n+1}(x) - \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!} & x \neq \overline{x} \end{cases}$$

Da

$$\frac{1}{n+1} \int\limits_{\overline{x}}^{x} \frac{(x-t)^n}{(x-\overline{x})^{n+1}} dt = 1,$$

ist

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_{\overline{x}}^{x} \frac{(x-t)^n}{(x-\overline{x})^{n+1}} \left( f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(\overline{x}) \right) dt,$$

folglich

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{n!} \sup_{t \in J} |f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(\overline{x})|,$$

wobei $J = [\overline{x}, x]$ $bzw.[x, \overline{x}]$.

Da $f^{(n+1)}$ stetig, ist $\varepsilon$ stetig in $\overline{x}$ und $\varepsilon(\overline{x}) = 0$. □

**Anwendungen 4.1.14** *:*

[1] $f^{(n+1)} = 0 \Leftrightarrow f$ *Polynom vom Grade* $\leq n$

[2] ***(Regel von l'Hôpital)***
$f, g : I \to \mathbb{R}(n+1)$*-mal stetig differenzierbar,*
$\overline{x} \in I$ *so dass*

$$f^{(k)}(\overline{x}) = g^{(k)}(\overline{x}) = 0 \text{ für } k = 0, ..., n, \qquad g^{(n+1)}(\overline{x}) \neq 0.$$

*Dann existiert*

$$\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \neq \overline{x}}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

*und es gilt*

$$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}$$

Denn:
Zunächst gibt es ein $\delta > 0$, so dass $g^{(n+1)}(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ mit $|x - \overline{x}| < \delta$. Für diese $x$ ist dann

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\overline{x}) + (n+1)! \cdot \varepsilon_f(x)}{g^{(n+1)}(\overline{x}) + (n+1)! \cdot \varepsilon_g(x)}$$

Da $\varepsilon_f$ und $\varepsilon_g$ stetig in $\overline{x}$, $\varepsilon_f(\overline{x}) = \varepsilon_g(\overline{x}) = 0$, folgt die Behauptung.

**EX:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{log'(1+x)}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

[3] $\overline{x} \in I \subset \mathbb{R}$ *innerer Punkt,*
$f : I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$*-mal stetig differenzierbar,*
$f^{(k)}(\overline{x}) = 0$ *für* $k = 1, ..., n, f^{(n+1)}(\overline{x}) \neq 0.$

*äq*

(i) $\overline{x}$ *relatives Maximum von* $f$

(ii) $n+1$ *gerade und* $f^{(n+1)}(\overline{x}) < 0.$

*Beweis zu* [3]*:*

Zunächst gibt es ein $\delta > 0$, so dass $(\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta) \subset I$ und

$$f(x) - f(\overline{x}) = \left( \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\overline{x}) + \varepsilon(x) \right) (x - \overline{x})^{(n+1)}$$

für alle $x \in (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii):
Œ $f(x) - f(\overline{x}) \leq 0$ für alle $x \in (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta)$.
Für diese $x$ ist dann, falls $n + 1$ ungerade,

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\overline{x}) + \varepsilon(x) = \begin{cases} \geq 0 & x < \overline{x}, \\ \leq 0 & x > \overline{x}, \end{cases}$$

also $f^{(n+1)}(\overline{x}) = 0$, ein Widerspruch.
Ist $(n+1)$ gerade, so ist $f^{(n+1)}(\overline{x}) \leq 0$, also $< 0$, da $\neq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i):
Es gibt ein $0 < \eta < \delta$, so dass

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\overline{x}) + \varepsilon(x) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\overline{x}) < 0$$

für alle $|x - \overline{x}| < \eta$. □

**EX:**

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ist

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{3n}} \cdot exp(-\frac{1}{x^2})$$

mit einem Polynom $p_n$ vom Grad $\leq n$, insbesondere:

$$f^{(n)}(0) = 0 \text{ für alle } n \geq 0.$$

**Definition 4.1.15** *:*
$\overline{x} \in X \subset I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \to \mathbb{R}$ $\infty$*-oft differenzierbar*

(1)

$$j^n_{\overline{x}} f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\overline{x})(x - \overline{x})^k$$

*heißt* ***n-Jet*** *(oder* ***n-tes Taylorpolynom****) von* $f$ *in* $\overline{x}$.

(2)

$$j_{\overline{x}}f(x) := \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(\overline{x})}{k!}(x-\overline{x})^k$$

*heißt* $\infty$***-Jet*** *(oder* ***Taylorreihe****) von* $f$ *in* $\overline{x}$*.*

(3) $j_{\overline{x}}f$ *stellt* $f$ *auf* $X$ *dar* $:\Leftrightarrow j_{\overline{x}}f \to f$ *auf* $X$ *punktweise.*

**EX:**

[1]

$$f(x) := \begin{cases} \emptyset & x=0 \\ exp(-\frac{1}{x^2}) & x\neq 0 \end{cases}$$

$j_0 f = 0$; $j_0 f$ stellt $f$ nur in 0 dar.

[2] $x \to \arctan(x)$ ist $\infty$-oft differenzierbar,

$$\begin{aligned} j_0 \arctan(x) &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x|\leq 1 \\ &= \arctan(x), \end{aligned}$$

d.h. der jet stellt arctan auf $|x| \leq 1$ dar.

**Bemerkung 4.1.16** *:*
*Es gibt ein* $R \geq 0$*, so dass* $j_{\overline{x}}f$ *lokal gleichmäßig konvergiert in* $|x-\overline{x}| < R$*, und in* $|x-\overline{x}| > R$ *divergiert.*
*Potenzreihen* $A(x) := \sum_{n\geq 0} a_n(x-\overline{x})^n$ *stimmen mit ihrem Jet* $j_{\overline{x}}A = A$ *überein.*

**Satz 4.1.17** *:*

*äq*

(i) $j_{\overline{x}}f(x) \to f(x)$

(ii) $R_n(x) \to 0$.

*Beweis :* $|j^n_{\overline{x}}f(x) - f(x)| = |R_n(x)|$. $\square$

**Folgerung 4.1.18** *:*

$\overline{x} \in [a,b] \subset I, \quad A,\ B > 0$ *so dass*

$$\|f^{(n)}\big|_{[a,b]}\| = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \leq A \cdot B^n.$$

*Dann konvergiert* $j_{\overline{x}}\big|_{[a,b]}$ *gleichmäßig gegen* $f\big|_{[a,b]}$.

*Beweis :*
Für $x \in [a,b]$ ist

$$\begin{aligned} |j^n_{\overline{x}} f(x) - f(x)| &= |R_{n+1}(x)| \\ &= \frac{1}{n!} \Big| \int_{\overline{x}}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \Big| \\ &\leq \frac{1}{n!}(b-a)^n A \cdot B^{n+1} \end{aligned}$$

d.h.

$$\left\| (j^n_{\overline{x}} f - f) \,\big|_{[a,b]} \right\| \leq A \cdot B \cdot \frac{(b-a)^n . B^n}{n!}$$

Da $\exp((b-a)\cdot B)$ konvergiert, ist $\frac{(b-a)^n B^n}{n!}$ eine Nullfolge. $\square$