4.2 Elementare Funktionen: $(1+x)^\alpha$

Für natürliche Zahlen $0 \le k \le n$ ist bekanntlich der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Die rechte Seite erlaubt folgende Verallgemeinerung für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & k>0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\binom{\alpha}{k} = 0$ genau dann, wenn $\alpha = m$ für eine natürliche Zahl $0 \le m \le k-1$.

Satz 4.2.0 *:*
Die Potenzreihe

$$\sum_{n\ge 0} \binom{\alpha}{n} x^n$$

konvergiert für $|x| < 1$, und es gilt

$$\sum_{n\ge 0} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha, \ |x| < 1$$

Zusatz: Ist $\alpha > 0$, so konvergiert
$\sum\limits_{n\ge 0} \binom{\alpha}{n}$ *absolut,*
$\sum n \ge 0 \binom{\alpha}{n} x^n$ *absolut und gleichmäßig in $|x| \le 1$*
und es gilt

$$\sum_{n\ge 0} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha, \ |x| \le 1, \ \alpha > 0$$

Der Identitätssatz für Potenzreihen liefert

Folgerung 4.2.1 *:*

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{j+k=n} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{k}$$

EX:

$$\sqrt[3]{2} = (1+1)^{\frac{1}{3}} = \sum_{n\ge 0} \binom{\frac{1}{3}}{n}.$$

Beweis des Satzes:
Œ $\alpha \notin \mathbb{R}$, da in diesem Fall fast alle Binomialkoeffizienten verschwinden.
Ist $\alpha \notin \mathbb{N}$, so ist $\binom{\alpha}{n} \neq 0$, und nach QK ist für $0 < |x| < 1$

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^n}\right| = \frac{|\alpha - n|}{n+1}|x| \longrightarrow |x| < 1$$

d.h.

$$\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n \text{ konvergiert absolut in } |x| < 1.$$

Ist $\alpha > 0$, $a_n := \left|\binom{\alpha}{n}\right|$, so ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-\alpha}{n+1} \text{ für } n \geq [\alpha] + 1.$$

Für diese n ist

$$na_n - (n+1)a_{n+1} = \alpha \cdot a_n > 0$$

d.h. $(n \cdot a_n)$ ist schließlich monoton fallend. Deshalb existiert

$$\gamma := \lim n \cdot a_n$$

und $\gamma \geq 0$.
Die k-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n\geq 0}(na_n - (n+1)a_{n+1})$ ist $-(k+1)a_{k+1}$.
Daher konvergiert die Reihe $\sum_{n\geq 0}(na_n - (n+1)a_{n+1})$, und damit wegen

$$a_n = \frac{1}{\alpha}(na_n - (n+1)a_{n+1})$$

die Reihe

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n\geq 0}\left|\binom{\alpha}{n}\right|.$$

Wegen $\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right| \leq \left|\binom{\alpha}{n}\right|$ für $|x| \leq 1$, konvergiert für $\alpha > 0$ die Reihe $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$ absolut und gleichmäßig in dem Intervall $[-1, 1]$.
Schließlich sei für $\alpha \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$

$$f_\alpha(x) = \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n,$$

also

$$f'_\alpha(x) = \sum_{n\geq 1} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \alpha \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha-1}{n}x^n = \alpha \cdot f_{\alpha-1}(x),$$

da $(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \alpha\binom{\alpha-1}{n}$. Mittels der Rekursionsformel

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}, \quad n \geq 1$$

und einer direkten Rechnung folgt

$$(1+x)f_{\alpha-1}(x) = f_\alpha(x)$$

oder

$$(1+x)f'_\alpha(x) = \alpha\ f_\alpha(x),\ |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

d.h. f_α erfüllt die DGL

$$\frac{d}{dx}\left(f_\alpha(x) \cdot (1+x)^{-\alpha}\right) = 0$$

Daher ist $f_\alpha(x) = const(1+x)^\alpha$, und schließlich wegen $f_\alpha(0) = 1$

$$f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha,\ |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für $\alpha > 0$ gilt sogar

$$f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha \text{ für } |x| \leq 1$$

nach dem Abelschen Grenzwertsatz.
Beachte: $(-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (1+x)^\alpha = \exp(\alpha \log(1+x))$, hat eine stetige Fortsetzung nach -1 für $\alpha > 0$. □

Folgerung 4.2.2 ***(Approximationssatz von Weierstrass)***
Es gibt eine Folge (p_m) von Polynomen, die auf $[-1,1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $x \mapsto |x|$ konvergiert.

Insbesondere ist also die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge differenzierbarer Funktioen im allgemeinen nicht differenzierbar.

Beweis :

$$|x| = (1-(1-x^2))^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n (1-x^2)^n.$$

Die Partialsummen sind Polynome, die auf $[-1,1]$ gleichmäßig gegen die Abbildung

$$x \longmapsto |x|$$

konvergieren. □

ENDE der Vorlesung Analysis I