3. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe: 19.11.1999, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

3.1.:

Zeige durch Induktion:

(1) $\sum_{k=o}^{n} k^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2, \; n \in \mathbb{N}$ (2)

(2) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}, \; n \geq 4$ (2)

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$, sofern entweder alle $x_k \geq 0$ sind oder aber $-1 < x_k \leq 0$ für $k = 1, ..., n$ ist. (2)

3.2.:

Zeige, dass die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ein Quadrat einer natürlichen Zahl ist. Ist jedes von Null verschiedene Quadrat einer natürlichen Zahl von dieser Form? (4)

3.3.: *

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ irrational?

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Primfaktor-Zerlegung hat. (5)

3.4.:

a) Determine all real numbers $x \in \mathbb{R}$ such that $2x^2 + 5x - 3 < 0$. (2)

b) Prove the well-known inequalities between the harmonic, geometric and arithmetic mean (= Mittel):

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad 0 < a, b.$$

In which case equality does hold? (3)

* anspruchsvoll