SS 2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

10. Übungsblatt zur Analysis II
Abgabe: 23.06.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

Aufgaben 10.1. und 10.2. sind mündlich zu bearbeiten.

10.1.:
Sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare geschlossene Kurve.
Zeige: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Gradient von V, so verschwindet das Kurvenintegral

$$I_c(f) := \int_c \big(f(c(t)) \big| \dot{c}(t)\big)\, dt.$$

10.2.:
Gibt es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (y^2 z, 2xyz, xy^2 + z)?$$

10.3.:
Bestimme den 2-Jet der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^y - y^x$$

im Punkte (e,e). (5)

10.4.: (Sufficient condition for local extrema)
Suppose $k \geq 2$, $0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ open, and let $f : X \to \mathbb{R}$ be k-times continuously differentiable in all points of a small open neighbourhood U of 0 with k-jet

$$j_0^k f(x) = f(0) + \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha =: f(0) + p(x).$$

Show that

(1) $p(x) > 0$ for all $x \in U \setminus \{0\}$ (i.e. $j_0^k f$ has in 0 a local minimum) implies that f itself has in 0 a local minimum, and

(2) $p(x) < 0$ for all $x \in U \setminus \{0\}$ implies that f has in 0 a local maximum. (5)

Klausur:	07.07.2000,	14.15 - 17.00,	HG 114
Nachklausur:	12.10.2000,	9.15 - 12.00,	HG 114