SS 2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

11. Übungsblatt zur Analysis II
Abgabe: 30.06.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

Aufgaben 11.1. und 11.2. sind mündlich zu bearbeiten.

11.1.:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f : (x, y) \longmapsto 2x^2 - 3xy^2 + y^4$. Zeige:

a) Ist G eine beliebige Ursprunggerade, so besitzt $f\big|_G$ im Ursprung ein lokales Minimum.

b) f besitzt im Ursprung kein lokales Minimum.

Tipp zu b): $f(x, y) = x\left(x - y^2\right) + \left(x - y^2\right)^2$. Bestimme hiermit $M := \{(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$ (Skizze!) und zeige dann, dass f in jeder ε-Umgebung von 0 positive und negative Werte annimmt.

11.2.:
Sei $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^N$ und $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sum_{j=1}^{N} \|x - a_j\|_2^2$.
Bestimme das absolute Minimum von f.

11.3.:
Sei $X \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.
$\bar{x} \in X$ heißt ein "kritischer Punkt von f", wenn $\mathrm{grad} f(\bar{x}) = 0$. Der kritische Punkt heißt "nicht ausgeartet", wenn außerdem $\det Hess f(\bar{x}) \neq 0$.
Zeige: Ist $\bar{x} \in X$ ein nichtausgearteter kritischer Punkt von f, so gibt es eine ε-Umgebung von $\bar{x}$, in der keine weiteren kritischen Punkte von f liegen. (5)

11.4.:
Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ be symmetric with eigen-values $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ and define $q : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ by

$$q(x) := \frac{(Ax|x)}{\|x\|_2^2}.$$

a) Show that $x \in R^n \setminus \{0\}$ is a critical point of q if and only if x is an eigen-vector of A.

b) Conclude that for symmetric $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|A\| = \max_{k=1,\dots,n} |\lambda_k|.$$

(5)

Klausur:	07.07.2000,	14.15 - 17.00,	HG 114
Nachklausur:	12.10.2000,	9.15 - 12.00,	HG 114