SS 2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

12. Übungsblatt zur Analysis II

freiwillige Abgabe: 07.07.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

Aufgaben 12.1. und 12.2. sind mündlich zu bearbeiten.

12.1.: Sei $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < a,\ |y| < b\}$ und $u : X \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so dass $u_{xy} = 0$.
Zeige: Es gibt zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$, $g : (-b,b) \to \mathbb{R}$, so dass

$$u(x,y) = f(x) + g(y) \text{ für alle } (x,y) \in X.$$

12.2.: Show that there is a positive real number $\varepsilon > 0$ and an injective, continuously differentiable curve

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$$

passing through the origin and tracing completely in

$$X := \{(x,y) \mid xe^x + ye^y + xy = 0\}.$$

Tipp: SIF.

12.3.: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \neq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n$$

und $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(\bar{x})\}$.
Nach SIF gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so für alle $x \in M \cap B_\varepsilon(\bar{x})$ gilt: Jede Variable x_i ist als eine Funktion der restlichen Variablen $x_k, k \neq i$ darstellbar.
Zeige:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}(x_2, x_3, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_3}(x_1, x_3, \dots, x_n) \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = (-1)^n.$$

(5)

Tipp: $\frac{\partial x_i}{\partial x_k}$ ausrechnen.

12.4.: Sei $\mathbb{S} := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \|A\|_2 = 1\}$ die Menge der reellen zweireihigen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \text{ mit der Eigenschaft } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Gib ein Maximum und ein Minimum der Funktion

$$A \mapsto \det A, \quad A \in \mathbb{S}$$

an. (5)

Tipp: Schreibe $\mathbb{S}$ als Nullstellenmenge einer geeigneten Funktion f und suche die kritischen Punkte von $g := \det$ unter der Nebenbedingung $N(f)$.

Klausur:	07.07.2000,	14.15 - 17.00,	HG 114
Nachklausur:	12.10.2000,	9.15 - 12.00,	HG 114