SS 2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

3. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe: 05.05.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

Aufgaben 3.1 und 3.2 mündlich.

3.1.:
Berechne die Fourier-Koeffizienten folgender 1-periodischer Funktionen f

$$\text{a)}\quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$\text{b)}\quad f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

Konvergieren die Fourierreihen punktweise/gleichmäßig? Bestimme die Grenzfunktionen.

Tipp: Es gilt $\chi_n \cdot \chi_m = \chi_{n+m}$, $\overline{\chi_n} = \chi_{-n}$, $\chi_n\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n$. Eine Stammfunktion von χ_{-n} ist $\frac{i}{2\pi n}\chi_{-n}$, und daraus folgt $\int f\chi_{-n} = \frac{i}{2\pi n}\Big([f\chi_{-n}] - \int f'\chi_{-n}\Big)$ in den jeweiligen Integrationsgrenzen.

3.2.:
Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum der 1-periodischen Funktionen. Zeige, dass die Familie $(\chi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in V linear unabhängig ist

a) mit einem geeigneten Skalarprodukt,

b) mit dem Fundamentalsatz der Algebra.

3.3.:

a) Zeige für $0 < x < 1$:
$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n}\sin(2\pi n x).$$
Folgere hieraus erneut, dass $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}$ konvergiert.

b) Entwickle die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |\sin(2\pi x)|$ in ihre Fourierreihe. (5)

3.4.:
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine 2-mal stetig differenzierbare, 1-periodische Funktion.
Zeige, dass die Fourierreihe von f' gleichmäßig gegen f' konvergiert.
Wie hängen die Fourier-Koeffizienten von f und von f' zusammen? Was fällt auf? (5)

3.5.: (freiwillige Zusatzaufgabe)
Let $0 < a_n < c$, $0 \le c_n \le 1$, $n \in \mathbb{N}$, and $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ be the mapping
$$x \longmapsto f(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}}\{a_n \cdot |x - c_n|\}.$$
Is f of bounded variation? (5)
Hint: For $x, y \in [0,1]$ one has $|f(x) - f(y)| < 2c|x-y|$.