SS 2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

4. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe: 12.05.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

Aufgaben 4.1. und 4.2. sind mündlich zu bearbeiten.

4.1.:

a) Zeige, dass durch

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|_2 & x,\, y \text{ linear abhängig,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik im $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

b) Welche Folgen des $\mathbb{R}^n$ konvergieren in dieser Metrik?

Bemerkung: In Anspielung auf das Eisenbahnnetz rund um manche Metropolen wird diese Metrik in der Literatur oft mit "SNCF-Metrik" oder "Washington D.C.-Metrik" bezeichnet. Warum wohl? (Konvergente Folgen sind quasi ein Transportmittel, um ihren Grenzwert anzusteuern und zu erreichen.)

4.2:

a) Seien X, Y metrische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ stetig und $\Gamma := \{(x,y) \in X \times Y \big| y = f(x)\}$ der Graph von f.
Zeige: $X \times Y \setminus \Gamma \subset X \times Y$ ist offen.

b) Sei $f : \mathbb{R}_+ :\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ und Γ der Graph von f.
Ist $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ offen?

4.3:

In welchen Punkten der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist die Abbildung

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 & x = y = 0, \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{sonst,} \end{cases}$$

stetig? (4)

4.4:

Let $V := \{f \in BV([0,1]) | f(0) = 0\}$ be the $\mathbb{C}$-vectorspace of all functions $f : [0,1] \longmapsto \mathbb{C}$ of bounded variation such that $f(0) = 0$.
Show that

$$\|\ \| : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad f \longmapsto \|f\| := V_0^1$$

is a norm on V such that

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|.$$

Is $\big(V,\ \|\ \|\big)$ complete? (6)