SS 2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

5. Übungsblatt zur Analysis II
Abgabe: 19.05.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

Aufgaben 5.1. und 5.2. sind mündlich zu bearbeiten.

5.1.:
Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum der 1-periodischen Funktionen so dass $f\big|_{[0,1]}$ von beschränkter Variation und $f(0) = 0$ ist, versehen mit der Norm $\|f\| := V_0^1(f)$. (vgl. Aufg.4.4)
Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildungen

$$\varphi_n : V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto \hat{f}(n)$$

stetig sind.

5.2.:
Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$ mit einer Norm eigener Wahl versehen (z.B. $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$ oder Spaltensummennorm).
Zeige: Die Gruppe $O(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ der orthogonalen $n \times n$-Matrizen ist kompakt, aber nicht zusammenhängend.
Gilt das auch für die Gruppe $U(n) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ der unitären $n \times n$-Matrizen?

5.3.:
Sei $X := \left\{ \left(t, \sin \frac{1}{t}\right) \middle| 0 < t \leq 1 \right\}$. Zeige, dass $\overline{X}$ zusammenhängend ist. (4)
Warnung: $\overline{X}$ ist nicht bogenweise zusammenhängend (Beweis subtil).

5.4.:
Let H be the $\mathbb{C}$-vectorspace of all continuous functions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ of period 1.
Show that

(1) $f \longmapsto \|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$ is a norm on H,

(2) the ball $K := \{f \in H \big| \|f\|_2 \leq 1\}$ is bounded and closed, but not compact,

(3) given the norm $\|\ \|_2$ on H, the scalar product

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (f, g) \longmapsto (f|g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

is continuous. (6)