SS 2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

6. Übungsblatt zur Analysis II
Abgabe: 26.05.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

Aufgaben 6.1. und 6.2. sind mündlich zu bearbeiten.

6.1.:
Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $V := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$ sei versehen mit dem Skalarprodukt

$$(f|g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $p_n \in V$ definiert durch $p_n(t) := t^n, \quad t \in [0,1]$,
und $$U := \operatorname{span}\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
Zeige: $U \subsetneqq V$, aber $U^\perp = \{0\}$, d.h. die Gleichung $V = U \oplus U^\perp$ gilt nicht.

6.2:
Zeige: Eine Teilmenge $\emptyset \neq A \subset X$ eines vollständigen metrischen Raumes X ist genau dann vollständig, wenn sie abgeschlossen ist.

6.3:
Berechne folgende Integrale

(1) $\displaystyle\int_X \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy, \quad X := [1,2] \times [0,1],$

(2) $\displaystyle\int_X x^3 \exp(-x^2 y)dxdy, \quad X := [0,1] \times [0,1],$

(3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx, \quad f(x) := \begin{cases} \big|1 - \|x\|_\infty\big|, & \|x\|_\infty \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(5)

6.4:
Show that there is exactly one continuous mapping $f : \left[0, \frac{1}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$f(x) = x + \int_0^{1/4} \sin(xy)f(y)dy$$

for all $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.
Find explicitly a continuous mapping $g : \left[0, \frac{1}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ such that $\|f - g\|_\infty < 10^{-4}$. (5)