8. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe: 09.06.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

Aufgaben 8.1. und 8.2. sind mündlich zu bearbeiten.

8.1.: Skizziere die ebene Kurve

$$c : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \big((1-\cos t)\cos t, (1-\cos t)\sin t\big).$$

8.2.: Für $A := \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ sei $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} \big|1 - \|Ax\|_\infty\big| & \text{für } \|x\|_1 \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Überprüfe, ob g stetig ist, und berechne $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} g(x)dx$.

8.3: Zeige, dass die ebene Kurve

$$c : t \longmapsto \begin{cases} (0,0) & \text{für } t = 0, \\ \big(t, t\sin\frac{1}{t}\big) & \text{für } 0 < t \le 1 \end{cases}$$

nicht rektifizierbar ist. (5)

8.4.: For $A = \big(a_{jk}\big) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ the trace of A is defined by $\mathrm{spur}A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$ and the $\|\ \|_2$-norm of A by $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2}$.

a) Show that $\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{spur}(AA^*)}$ for all $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

b) Let $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ be hermitian and $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$ be the n-tuple of real eigenvalues of A. Conclude that $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j^2}$.

c) For hermitian $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ define the curve $c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n}$ by

$$t \longmapsto c(t) := \exp(itA) = \sum_{n\ge 0} \frac{(it)^n}{n!} A^n.$$

Compute for every $t \in [0,1]$ the tangent vector $\dot{c}(t)$, the velocity $\|\dot{c}(t)\|_2$ and the length $L(c)$ of c. (5)

Hint: $\mathbb{C}^{n\times n}$ is complete with respect to $\|\ \|_2$, therefore $\exp(itA)$ converges, and c maps into the group $U(n)$ of unitary matrices (LA II, theorem of polar decomposition).