SS 2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

Lösungen zum 1. Übungsblatt zur Analysis II

1.1:

Zu (1):

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 &\Leftrightarrow |z-i| = [z-(-i)| \\ &\Leftrightarrow \text{ z hat von } i \text{ und } -i \text{ den gleichen Abstand} \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

d.h. die Menge ist $\mathbb{R}$.

Alternativ: Rechnerisch weiter ab Zeile 2:

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (z-i)\overline{(z-i)} = (z+i)\overline{(z+i)} \\ &\Leftrightarrow (z-i)(\overline{z}+i) = (z+i)(\overline{z}-i) \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - i\overline{z} + iz + 1 = z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1 \\ &\Leftrightarrow 2iz = 2i\overline{z} \\ &\Leftrightarrow z = \overline{z}, \text{ d.h. } z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Zu (2):

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-c}{\overline{c}z-1}\right| < 1 &\Leftrightarrow |z-c|^2 < |\overline{c}z-1|^2 \\ &\Leftrightarrow (z-c)\overline{(z-c)} < (\overline{c}z-1)\overline{(\overline{c}z-1)} \\ &\Leftrightarrow (z-c)(\overline{z}-\overline{c}) < (\overline{c}z-1)(c\overline{z}-1) \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - c\overline{z} - z\overline{c} + c\overline{c} < c\overline{c}z\overline{z} - \overline{c}z - c\overline{z} + 1 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z}(1-c\overline{c}) < 1 - c\overline{c} \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} < 1, \text{ da } c\overline{c} = |c|^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 < 1,\end{aligned}$$

d.h. die Menge ist das Innere des Einheitskreises.

1.2:

Sei $\xi \in \mathbb{C}$ irgendeine Nullstelle $\neq 1$ des Polynoms $z^n - 1$ mit $\xi \neq 1$ (gibt's, z.B. $\xi = \exp(2\pi i/n)$).
Dann gilt wegen $\xi^n = 1$

$$1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^n = \frac{1-\xi^{n+1}}{1-\xi} = \frac{1-\xi}{1-\xi} = 1$$

Daraus folgt $\xi + \ldots + \xi^n = 0$.
Alternativ: $w := \xi + \ldots + \xi^n \Rightarrow \xi w = w \Rightarrow (\xi - 1)w = 0 \Rightarrow w = 0$.
Beweis der Folgerung: Wähle speziell $\xi = \exp(2\pi i/n)$ (s.o.). Dann folgt $1 + \xi + \ldots + \xi^{n-1} = 0$, also

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right), \text{ d.h.}$$

$$0 = Re\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)\right\} = \sum_{k=0}^{n-1} Re\left\{\exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)\right\} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \text{ und analog}$$

$$0 = Im\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right)\right\} = \sum_{k=0}^{n-1} Im\left\{\exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right)\right\} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right).$$

1.3:
Zu (1): Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für alle $t \in \mathbb{R}$ nach dem Majorantenkriterium, und es gilt

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(nt)}{2^{n+1}} = Re\left\{\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{\exp(int)}{2^n}\right\} = Re\left\{\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\exp(it)}{2}\right)^n\right\}$$

Wegen $\left|\frac{\exp(it)}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ konvergiert die komplexe Reihe absolut für alle $t \in \mathbb{R}$ und es ergibt sich

$$Re\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}\exp(it)} = Re\ \frac{(2-\overline{\exp(it)})}{(2-\exp(it))(2-\overline{\exp(it)})} = Re\ \frac{2-(\cos t - i\sin t)}{4-2\big(\exp(it)+\overline{\exp(it)}\big)+|\exp(it)|^2}$$

$2\big(\exp(it)+\overline{\exp(it)}\big) = 2\cdot 2\ Re\{\exp(it)\} = 4\cos t$, außerdem $|\exp(it)| = 1$, daher ergibt sich weiter

$$Re\ \frac{2-(\cos t - i\sin t)}{5-4\cos t} = \frac{2-\cos t}{5-4\cos t}.$$

Zu (2):

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(nt)}{n!} &= Im\left\{\sum_{n\geq 0}\frac{\exp(int]}{n!}\right\} = Im\ \sum_{n\geq 0}\frac{\big(\exp(it)\big)^n}{n!} = Im\ \exp\big(\exp(it)\big)\\ &= Im\ \exp(\cos t + i\sin t) = Im\{\exp(\cos t)\cdot\exp(i\sin t)\}\\ &= \exp(\cos t)\cdot Im\ \big(\cos(\sin t)+i\sin(\sin t)\big) = \exp(\cos t)\cdot\sin(\sin t).\end{aligned}$$

1.4:

Sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig gegeben. Zunächst gesucht: $u \in \mathbb{C}$ mit $\frac{1}{2i}(u-u^{-1}) = w$. Das ist äquivalent zu $u - \frac{1}{u} = 2iw$ bzw. $u^2 - 2iw\cdot u - 1 = 0$. Nach dem Fundamentalsatz hat das Polynom $z^2 - 2iw\cdot z - 1$ stets eine Lösung $u \in \mathbb{C}$, und diese Lösung ist stets $\neq 0$.
Sei also $w = \frac{1}{2i}(u-u^{-1})$. Da $u \neq 0$ und $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ surjektiv, gibt es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $u = \exp\zeta$. Für $z := \frac{\zeta}{i}$ gilt dann $u = \exp(iz)$, $w = \frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big) = \sin z$.