Lösungen zum 10. Übungsblatt zur Analysis II

10.1.: Nach Def. Kurvenintegral (Internet-Skript S.199) ist

$$I_c(f) = \int_0^1 \Big(f\big(c(t)\big)\big|\dot{c}(t)\Big)dt = \int_0^1 \Big(\mathrm{grad}V\big(c(t)\big)\big|\dot{c}(t)\Big)dt$$

Nun ist $g := V \circ c : [0,1] \to \mathbb{R}$ nach der Kettenregel stetig differenzierbar und es gilt

$$g'(t) = Dg(t) = DV\big(c(t)\big) \circ Dc(t)(1) = \Big(\mathrm{grad}V\big(c(t)\big)\big|\dot{c}(t)\Big)$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$I_c f = \int_0^1 g'(t)dt = g(1) - g(0) = V\big(c(1)\big) - V\big(c(0)\big)$$

und das ist gleich Null, da die Kurve c nach Voraussetzung geschlossen ist, d.h. $c(1) = c(0)$.

10.2.: Die Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto (y^2z, 2xyz, xy^2+z)$ ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar, da die drei Komponentenfunktionen

$$g_1 : (x,y,z) \mapsto y^2z, \quad g_2 : (x,y,z) \mapsto 2xyz, \quad g_3 : (x,y,z) \mapsto xy^2 + z$$

Polynome in x, y, z sind.
Wenn es daher ein $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt mit $\mathrm{grad}f = g$, d.h. mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g_2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = g_3, \tag{1}$$

dann ist mit Folgerung 7.1.16 (Internet-Skript S.210) notwendig die Hesse-Matrix von f symmetrisch. Ist diese Bedingung erfüllt? Ja, denn

$$H(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_3}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2yz & y^2 \\ 2yz & 2xz & 2xy \\ y^2 & 2xy & 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt erscheint es wahrscheinlich, dass es ein solches f gibt, und wir versuchen, es aus den Bedingungen (1) durch Bestimmung von Stammfunktionen zu berechnen:
$y^2z \underset{(1)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$
$\Rightarrow f(x,y,z) = xy^2z + h_1(y,z) \qquad (2)$
wobei $h_1(y,z)$ nach y und z stetig partiell differenzierbar ist.
$\Rightarrow 2xyz \underset{(1)}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \underset{(2)}{=} 2xyz + \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y,z)$
$\Rightarrow \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y,z) = 0$
$\Rightarrow h_1(y,z) = h_2(z)$, wobei h_1 stetig nach z differenzierbar ist.
$\underset{(2)}{\Rightarrow} f(x,y,z) = xy^2z + h_2(z) \qquad (3)$

$\Rightarrow xy^2 + z \underset{(1)}{=} \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \underset{(3)}{=} xy^2 + h_2'(z)$
$\Rightarrow h_2'(z) = z$
$\Rightarrow h_2(z) = \frac{1}{2}z^2 + C$
$\underset{(3)}{\Rightarrow}$ Eine Lösung von (1) hat notwendig die Gestalt

$$f(x,y,z) = xy^2z + \frac{1}{2}z^2 + C.$$

Die Probe ergibt, dass dieses f tatsächlich (1) erfüllt. Es ist somit die einzige Lösung von (1).

10.3.: Für $u := (x,y)$, $\bar{u} := (\bar{x}, \bar{x})$ gilt allgemein

$$j_{\bar{u}}^2 f(u) = \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{D^\alpha f(\bar{u})}{\alpha!}(u - \bar{u})^\alpha.$$

Dabei ist $|\alpha| \leq 2 \iff \alpha \in \{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (2,0),\ (0,2),\ (1,1)\}$.

$\alpha = (0,0):\ \alpha! = 0!0! = 1, \quad D^\alpha f(u) = f(u), \quad (u-\bar{u})^\alpha = 1$
$\alpha = (1,0):\ \alpha! = 1!0! = 1, \quad D^\alpha f(u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad (u-\bar{u})^\alpha = x - \bar{x}$
$\alpha = (0,1):\ \alpha! = 0!1! = 1, \quad D^\alpha f(u) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad (u-\bar{u})^\alpha = y - \bar{y}$
$\alpha = (2,0):\ \alpha! = 2!0! = 2, \quad D^\alpha f(u) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad (u-\bar{u})^\alpha = (x-\bar{x})^2$
$\alpha = (0,2):\ \alpha! = 0!2! = 2, \quad D^\alpha f(u) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad (u-\bar{u})^\alpha = (y-\bar{y})^2$
$\alpha = (1,1):\ \alpha! = 1!1! = 1, \quad D^\alpha f(u) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad (u-\bar{u})^\alpha = (x-\bar{x})(y-\bar{y})$

Berechnung der $D^\alpha f(u)$ und der $D^\alpha f(\bar{u})$ im Falle $f(x,y) := x^y - y^x$ und $\bar{u} = (e,e)$:

α :	$D^\alpha f(u)$:	$D^\alpha f(e,e)$:
$(0,0)$	$x^y - y^x$	0
$(1,0)$	$yx^{y-1} - \log y \cdot y^x$	0
$(0,1)$	$\log x \cdot x^y - xy^{x-1}$	0
$(2,0)$	$y(y-1)x^{y-2} - (\log y)^2 y^x$	$-e^{e-1}$
$(1,1)$	$x^{y-1} + y\log x \cdot x^{y-1} - y^{x-1} - \log y \cdot xy^{x-1}$	0
$(0,2)$	$(\log x)^2 x^y - x(x-1)y^{x-2}$	e^{e-1}

$\Rightarrow j_{(e,e)}^2 f(x,y) = -\frac{e^{e-1}}{2}(x-e)^2 + \frac{e^{e-1}}{2}(y-e)^2.$

10.4.: As $0 \in U \subset X \subset \mathbb{R}^n$ and U open, there exists some $0 < \delta < 1$ such that $B := B_\delta(0) \subset U$. Define $S_\delta := \partial B = \{x \in B | \|x\|_2 = \delta\}$. For every $x \in B$, $x \neq 0$, there exists some $\mathrm{v} \in S_\delta$ and $0 < t \leq 1$ with $x = t\mathrm{v}$. By corollar 7.1.19 (internet-script p.211) there exists $r : U \to \mathbb{R}$ such that $\lim_{x\to 0} r(x) = 0$ and

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha + r(x)\|x\|_2^k \\ &= t^k \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} \mathrm{v}^\alpha + r(x)\|\mathrm{v}\|_2^k \right) \\ &= t^k \left(p(\mathrm{v}) + r(x)\delta^k \right) \end{aligned}$$

S_δ is compact, p continuous and $p(\mathrm{v}) > 0$ for all $\mathrm{v} \in S_\delta$ (as $0 \notin S_\delta$). Therefore exist

$$M := \max\{p(\mathrm{v}) | \mathrm{v} \in S_\delta\} < \infty \text{ and } m := \min\{p(\mathrm{v}) | \mathrm{v} \in S_\delta\} > -\infty.$$

Now if $p(x) > 0$ for all $x \in U$, $x \neq 0$, then $m > 0$ and there exists some $\varepsilon > 0$ such that $|r(x)| < \frac{m}{2}$ for all $x \in B_\varepsilon(0)$. So for all $x \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$

$$f(x) - f(0) = t^k\big(p(\mathrm{v}) + r(x)\delta^k\big) \geq t^k\big(m - |r(x)|\delta^k\big) \underset{0<\delta<1}{>} t^k\big(m - \frac{m}{2}\big) = t^k\frac{m}{2} > 0,$$

i.e. $f(x) > f(0)$ for all $x \in B_\varepsilon(0) \setminus 0$, and f has a local minimum in 0.
On the other hand, if $p(x) < 0$ for all $x \in U$, $x \neq 0$, then $M < 0 < |M|$ and there exists some $\varepsilon > 0$ such that $|r(x)| < \frac{|M|}{2}$ for all $x \in B_\varepsilon(0)$. So for all $x \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$

$$f(x) - f(0) = t^k\big(p(\mathrm{v}) + r(x)\delta^k\big) \leq t^k\big(M + |r(x)|\delta^k\big) \underset{0<\delta<1}{<} t^k\big(M + \tfrac{|M|}{2}\big) = t^k\big(-\tfrac{|M|}{2}\big) < 0,$$

i.e. $f(x) < f(0)$ for all $x \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$, and f has a local maximum in 0.