Lösungen zum 11. Übungsblatt zur Analysis II

11.1.: a) 1. Fall: G ist die y-Achse. Dann ist $f\big|_G = 2x^2$ und somit hat $f\big|_G$ im Ursprung ein lokales Minimum.
2. Fall: $G = \{(x, \lambda x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $f\big|_G(x,y) = f(x,\lambda x) = 2x^2 - 3\lambda^2 x^3 + 4\lambda^4 x^4 =: h(x)$. Es ist $h'(x) = 4x - 9\lambda^2 x^2 + 16\lambda^4 x^3$, $h''(x) = 4 - 18\lambda^2 x + 54\lambda^4 x^2$, also $h'(x) = 0$, $h''(0) = 4 > 0$, d.h. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat in $0 \in \mathbb{R}$ ein lokales Minimum. Folglich hat $f\big|_G$ in $0 \in \mathbb{R}^2$ ein lokales Minimum.
b) Ausmultiplizieren ergibt, dass $x\big(x - y^2\big) + \big(x - y^2\big)^2 = f(x,y)$. Folglich gilt $f(x,y) < 0$ genau dann, wenn

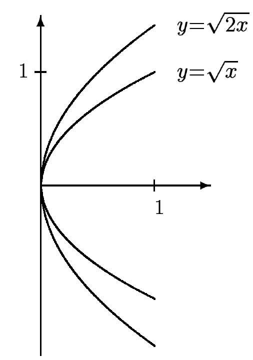
$$x\big(x - y^2\big) < -\big(x - y^2\big)^2 \tag{1}$$

Für $x - y^2 = 0$ ist (1) nicht erfüllt. $x - y^2 > 0$ impliziert $x > 0$, also ist die linke Seite von (1) positiv, die rechte negativ und somit (1) ebenfalls nicht erfüllt. Folglich ist (1) äquivalent zu

$$(1) \wedge x - y^2 < 0$$

Division von (1) durch das negative $x - y^2$ liefert, dass dies äquivalent ist zu $x > -\big(x - y^2\big) \wedge x - y^2 < 0$ und dies wiederum zu $2x > y^2 \wedge y^2 > x$, d.h. für $M =: \{(x,y) \mid f(x,y) < 0\}$ gilt

$$M = \{(x,y) \mid x > 0 \text{ und } \sqrt{x} < |y| < \sqrt{2x}\}.$$



Die Skizze zeigt, dass jede ε-Umgebung des Ursprungs mit M einen nichtleeren Schnitt hat, d.h. in ihr liegen Punkte (x,y) mit $f(x,y) < 0$, während $f(0,0) = 0$ ist. Also besitzt f im Ursprung kein lokales Minimum.
Rechnerischer Beweis: Sei $0 < \varepsilon < 1$. Wähle $0 < x < \frac{\varepsilon^2}{4}$ und $\sqrt{x} < y < \sqrt{2x}$. Dann gilt nach Obigem $f(x,y) < 0$. Bleibt zu zeigen: $(x,y) \in B_\varepsilon(0,0)$, d.h. $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$. Wegen $0 < x < 1$ ist $x^2 < x < \frac{\varepsilon^2}{4}$, außerdem $y^2 < 2x < \frac{\varepsilon^2}{2}$, also $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$. □

11.2.: Da $\mathbb{R}^N$ offen, ist ein absolutes Minimum von f, falls existent, zugleich auch ein lokales Minimum, also gilt dort notwendig $\operatorname{grad} f(\bar{x}) = 0$.

Berechnung von $\mathrm{grad} f(x)$ allgemein: Sei $a_i := (a_{i1}, \dots, a_{iN})$ $(i = 1, \dots, N)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|x - a_i\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N} (x_j - a_{ij})^2 \\
&\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (x_j - a_{ij})^2 \\
&\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{i=1}^{N} 2(x_k - a_{ik}) = 2N x_k - 2 \sum_{i=1}^{N} a_{ik} \\
&\Rightarrow \mathrm{grad} f(x) = 2Nx - 2 \sum_{i=1}^{N} a_i \\
&\Rightarrow \mathrm{grad} f(\bar{x}) = 0 \text{ gilt genau dann, wenn } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_i
\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt, daß dort ein lokales und ein absolutes Minimum vorliegt. Dazu berechne die Hesse-Matrix von f:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2N x_k - 2 \sum_{i=1}^{N} a_{ik} \right) = 2N \delta_{jk} \\
\Rightarrow Hess f(x) = \big(2N \delta_{ik}\big) = 2N E_n \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^N
\end{aligned}$$

Da die 2. partiellen Ableitungen von f konstant sind, sind alle höheren partiellen Ableitungen von f konstant gleich Null, d.h. f wird an jeder Stelle durch seinen 2-jet dargestellt:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (\mathrm{grad} f(\bar{x}) | x - \bar{x}) + \frac{1}{2} \big(Hess f(\bar{x})(x - \bar{x}) | (x - \bar{x}) \big) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^N.$$

Setzt man für $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_i$ nun $\mathrm{grad} f(\bar{x}) = 0$ ein und $Hess f(\bar{x}) = 2N E_N$, so folgt

$$f(x) = f(\bar{x}) + N \|x - \bar{x}\|_2^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^N,$$

d.h. f hat an dieser Stelle tatsächlich ein lokales und absolutes Minimum.

11.3.: $\mathrm{grad} f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto \mathrm{grad} f(x)$ ist eine Abbildung, deren 1. partielle Ableitungen gerade die 2. partiellen Ableitungen von f sind. Folglich gilt für die Jacobi-Matrix von $\mathrm{grad} f$

$$J \mathrm{grad} f(x) = Hess f(x).$$

Ist nun $\bar{x}$ ein nicht-ausgearteter kritischer Punkt von f, so gilt: Die Abbildung $\mathrm{grad} f$ hat dort den Wert 0 und eine invertierbare Jacobi-Matrix, d.h. ihre lineare Approximation ist dort invertierbar. Mit SUF folgt, dass $\mathrm{grad} f$ selber dort lokal invertierbar ist, d.h. es gibt eine ε-Umgebung von $\bar{x}$, in der die Abbildung $\mathrm{grad} f$ jeden Wert nur einmal annimmt. Insbesondere nimmt sie dort den Wert 0 nur im Punkt $\bar{x}$ an, was zu zeigen war.

11.4.: $X := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ open, $q(x) := \frac{(Ax|x)}{(x|x)} =: \frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\frac{\partial q}{\partial x_k}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}(x)}{g^2(x)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{grad}q(x) = \frac{1}{g^2(x)}\big(g(x)\cdot \mathrm{grad}f(x) - f(x)\cdot \mathrm{grad}g(x)\big) \tag{2}$$

Computation of grad$f(x)$ and grad$g(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (Ax|x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \text{ (quadratic form)}\\
\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_kx_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_ix_k + \sum_{i,j\neq k} a_{ij}x_ix_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i \underset{a_{ik}=a_{ki}}{=} 2\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\\
&= 2\cdot(\text{k-th line of } A)\cdot x = 2\cdot(\text{k-th component of } Ax)\\
\Rightarrow \mathrm{grad}f(x) &= 2Ax
\end{aligned}$$

$g(x) = (E_nx|x) \Rightarrow \mathrm{grad}g(x) = 2E_nx = 2x$

$$\begin{aligned}
x \text{ is a critical point of } q &\iff \mathrm{grad}q(x) = 0\\
&\underset{(2)}{\iff} g(x)\cdot\mathrm{grad}f(x) = f(x)\cdot\mathrm{grad}g(x)\\
&\iff g(x)2Ax = f(x)2x\\
&\iff Ax = \frac{f(x)}{g(x)}x\\
&\iff Ax = q(x)x\\
&\iff x \text{ is eigen-vector of } A \text{ and } q(x) = \lambda_k \text{ for some } k\in\{1,\dots,n\}
\end{aligned}$$

b) Since $S^{n-1} = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ is compact and $x\mapsto \|Ax\|_2$ continuous, there exists some $\bar{x}\in S^{n-1}$ such that

$$\|A\| = \|A\bar{x}\|_2 = \max_{x\in S^{n-1}} \|Ax\|_2.$$

Define $\tilde{q}(x) := \frac{(A^2x|x)}{\|x\|_2}$, $x\in X$. For $x\in S^{n-1}$ we have $\tilde{q}(x) = (A^2x|x) \underset{A=A^*}{=} (Ax|Ax) = \|Ax\|_2^2$, hence

$$\|A\|^2 = \tilde{q}(\bar{x}) = \max_{x\in S^{n-1}} \tilde{q}(x).$$

On the other hand $\tilde{q}(x) = \tilde{q}\big(\frac{x}{\|x\|_2}\big)$ for all $x\in X$. So

$$\tilde{q}(\bar{x}) = \max_{x\in X}\tilde{q}(x)$$

As X is open this means that $\bar{x}$ is not only a global maximum of $\tilde{q}$ but also a local one, whence grad$\tilde{q}(\bar{x}) = 0$. By a) we obtain that $\bar{x}$ is an eigen-vector of A^2. Now if $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ are the eigen-values of A, then $\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2$ are the eigen-values of A^2, and if v_k is any eigen-vector with $A^2\mathrm{v}_k = \lambda_k^2\mathrm{v}_k$, then $\tilde{q}(\mathrm{v}_k) = \lambda_k^2$ by definition of $\tilde{q}$. This yields

$$\max_{x\in X}\tilde{q}(x) = \max_{k=1,\dots,n}\lambda_k^2$$

and

$$\|A\| = \sqrt{\max_{k=1,\dots,n}\lambda_k^2} = \max_{k=1,\dots,n}|\lambda_k|$$

(Compare with the result of 8.4 b).)