Lösungen zum 12. Übungsblatt zur Analysis II

12.1.: Da u zweimal stetig differenzierbar ist, gilt n. Vor. $u_{xy} = u_{yx} = 0$. Wegen $\frac{\partial}{\partial y} u_x(x,y) = 0$ gilt für jedes feste x: Die partielle Abbildung $(-b,b) \ni y \mapsto u_x(x,y)$ ist konstant, $= c_x$.
Definiere $\varphi : (-a,a) \to \mathbb{R},\ x \mapsto c_x$. Dann gilt $u_x(x,y) = \varphi(x)$ für alle $(x,y) \in X$ und φ ist nach Konstruktion stetig differenzierbar nach x.
Für jedes feste $y \in (-b,b)$ hat die partielle Abbildung $x \mapsto u(x,y)$ die Ableitung $x \mapsto u_x(x,y) = \varphi(x)$. Sei $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$ irgendeine fest gewählte Stammfunktion von φ. Dann ist f zweimal stetig differenzierbar und zu jedem festen $y \in (-b,b)$ gibt es eine Konstante $d_y \in \mathbb{R}$ so dass $x \mapsto u(x,y) = f(x) + d_y$.
Definiere $g : (-b,b) \to \mathbb{R},\ y \mapsto d_y$. Dann folgt $u(x,y) = f(x) + g(y)$ für alle $(x,y) \in X$. Da f trivialerweise zweimal stetig nach y differenzierbar ist (mit Ableitung 0), folgt aus $g(y) = u(x,y) - f(x)$, dass g zweimal stetig nach y differenzerbar ist.

12.2.: In order to apply SIF we define $U := V := \mathbb{R}$, $\bar{x} := 0 \in U$, $\bar{y} := 0 \in V$ and $f : U \times V \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xe^x + ye^y + xy$ and obtain $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$.
$m = 1$, $f = f_1$, $Jf(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = \big((1+x)e^x + y, (1+y)e^y + x\big)$, therefore $\operatorname{grad} f(\bar{x},\bar{y}) = (1,1)$ and the second 1 in this vector is $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})$. So condition (2) of SIF is fulfilled. Applying SIF, we conclude that there exist open sets $0 \in U' \subset \mathbb{R}$ and $0 \in V' \subset \mathbb{R}$ and a uniquely defined continuously differentiable mapping

$$\tau : U' \to V', \quad \tau(0) = 0,$$

such that $y = \tau(x),\ x \in U' \Rightarrow f(x,y) = 0$, i.e. $(x,y) \in X$.
Without loss of generality we suppose $U' := (-\varepsilon, \varepsilon)$ and define $c(t) := \big((t, \tau(t)\big),\ t \in U'$. Then $c(0) = (0,0)$, $c(t) \in X$ for all t, and $\dot{c}(t) = \big(1, \tau'(t)\big)$, so c is continuously differentiable. c is injective by definition (because the first component function of c is injective).

12.3.: Für festes $i \in \{1, \ldots, n\}$ definiere
$u := (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{u} := (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, $x := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$, $y := x_i$ und

$$g(x,y) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(\bar{u}).$$

Dann folgt $M = \{u \in \mathbb{R}^n \mid g(x,y) = 0\}$, $Dg(x,y) = Df(u)$, $D_1 g(x,y) = D_x f(u)$, $D_2 g(x,y) = D_y f(u)$.
Nach Voraussetzung gilt $D_2 g(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{u}) \neq 0$. Mit SIF folgt die Existenz eines $\varepsilon_i > 0$ und eines $\delta_i > 0$, $U' := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|x - \bar{x}\|_\infty < \varepsilon_i\}$, $V' := \{y \in \mathbb{R} \mid |y - \bar{y}| < \delta_i\}$ und eines stetig differenzierbaren $\tau : U' \to V'$, so dass gilt:

$$(x,y) \in U' \times V',\ g(x,y) = 0 \Rightarrow y = \tau(x) \text{ und } D\tau(x,y) = -\big(D_2 g(x,y)\big)^{-1} \circ D_1 g(x,y)$$

Daraus folgt

$$\operatorname{grad}\tau(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}}(u), \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}(u), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(u)\right),$$

$$\text{d.h.}\quad \frac{\partial x_i}{\partial x_k}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(u)}{\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)}, \qquad \text{für alle } k \neq i \tag{1}$$

und alle $x \in U'$, d.h. wenn $|x_j - \bar{x}_j| < \varepsilon_i$ gilt für alle $j \neq i$.
Setze nun $\varepsilon := \min \varepsilon_i$. Dann ist $\varepsilon > 0$, $U'' := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - \bar{u}\|_\infty < \varepsilon\}$ eine offene Umgebung von $\bar{u} \in M$ und dort gilt (1) simultan für alle $i, k \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq k$, insbesondere

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}(x_2,x_3,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_3}(x_1,x_3,\dots,x_n)\cdot\ldots\cdot\frac{\partial x_n}{\partial x_1}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$$
$$= (-1)^n \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(u)}{\frac{\partial f}{\partial x_1}(u)}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}(u)}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(u)}\cdot\ldots\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(u)}{\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(u)}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(u)}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(u)} = (-1)^n$$

12.4.: $\mathbb{S}$ ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$, also kompakt. Da die reellwertige Funktion $g = \det$ stetig ist, nimmt sie auf $\mathbb{S}$ ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es gibt $\bar{x}_1 \in \mathbb{S}$ mit $g(\bar{x}_1) = \max\{g(x) \mid x \in \mathbb{S}\}$ und $\bar{x}_2 \in \mathbb{S}$ mit $g(\bar{x}_2) = \min\{g(x) \mid x \in \mathbb{S}\}$. Dies brauchen aber keine lokalen Extrema von $g : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ zu sein, sondern es sind kritische Punkte von $g\big|_{\mathbb{S}}$. Daher muss die Aufgabe mit dem Satz von Lagrange gelöst werden:
$\mathbb{S}$ ist die Nullstellenmenge $N(f)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $f(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1$. Gesucht sind die kritischen Punkte $\bar{x}$ von g mit der Nebenbedingung $N(f)$. Für diese gilt notwendig:
Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}^1$, so dass $D\big(g + (\lambda|f)\big)(\bar{x}) = 0$. Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^1$ ist einfach die Multiplikation und D ist linear, d.h. $Dg(\bar{x}) + \lambda Df(\bar{x}) = 0$ bzw. $\mathrm{grad}g(\bar{x}) = -\lambda \mathrm{grad} f(\bar{x})$.
Berechnung von λ und $\bar{x}$: $g(x) = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1x_4 - x_2x_3$, $\mathrm{grad}g(x) = (x_4, -x_3, -x_2, x_1)$, $\mathrm{grad}f(x) = (2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4)$. Zu lösen ist also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_4 &= -2\lambda x_1 \\ -x_3 &= -2\lambda x_2 \\ -x_2 &= -2\lambda x_3 \\ x_1 &= -2\lambda x_4 \end{aligned}$$

Aus der 1. und 4. Gleichung folgt notwendig $x_1 = x_4 = 0$ oder $4\lambda^2 = 1$, also $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Ensprechend folgt aus der 2. und 3. Gleichung notwendig $x_2 = x_3 = 0$ oder $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Das liefert folgende Lösungen:
$\lambda = \frac{1}{2}$: $x_4 = -x_1, x_3 = x_2$ und wegen $x \in N(f)$ auch $2x_1^2 + 2x_2^2 = 1$, $x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2}$, also $\bar{x} = \left(x_1, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2}, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2}, -x_1\right)$ mit $g(\bar{x}) = -\frac{1}{2}$.
$\lambda = -\frac{1}{2}$: $x_4 = x_1, x_3 = -x_2$ und wegen $x \in N(f)$ auch $2x_1^2 + 2x_2^2 = 1$, $x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2}$, also $\bar{x} = \left(x_1, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2}, \mp\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2}, x_1\right)$ mit $g(\bar{x}) = \frac{1}{2}$.
Für $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}$ ist das Gleichungssystem nur erfüllt, wenn $x_1 = x_4 = 0$ und $x_2 = x_4 = 0$ gilt. Dann ist aber $x \notin N(f)$. Dies liefert also keinen kritischen h Punkt von g unter der Nebenbedingung $N(f)$. Damit sind alle Stellen gefunden: In $\bar{x}_1 = \left(x_1, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2}, \mp\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2}, x_1\right)$ ist g maximal mit Wert $\frac{1}{2}$, in $\bar{x}_2 = \left(x_1, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2}, \mp\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2}, x_1\right)$ minimal mit Wert $-\frac{1}{2}$. In Matrixschreibweise:
det ist maximal für $\begin{pmatrix} x_1 & \pm\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2} \\ \mp\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2} & x_1 \end{pmatrix}$, minimal für $\begin{pmatrix} x_1 & \pm\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2} - x_1^2} & -x_1 \end{pmatrix}$.