Lösungen zum 2. Übungsblatt zur Analysis II

2.1:
Let $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ be a polynomial of degree $n \geq 1$ with real coefficients a_k and $\alpha \in \mathbb{C}$ a zero of p. Then

$$0 = p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0$$

and by rules of conjugation (remark that $\overline{a_k} = a_k$ for $a_k \in \mathbb{R}$)

$$0 = \overline{p(\alpha)} = a_n \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = p(\overline{\alpha}),$$

hence $\overline{\alpha}$ is a zero of p, too. p has n zeros in $\mathbb{C}$; if r of them are real, say $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, then $n - r = 2m$ for some $m \in \mathbb{N}$ and

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{r} (z - \alpha_k) \prod_{j=1}^{m} (z - \alpha_{r+j})(z - \overline{\alpha_{r+j}})$$

But

$$(z - \alpha_{r+j})(z - \overline{\alpha_{r+j}}) = z^2 - (\alpha_{r+j} + \overline{\alpha_{r+j}})z + \alpha_{r+j}\overline{\alpha_{r+j}}$$

is a quadratic polynomial with real coefficients, because of $(\alpha_{r+j} + \overline{\alpha_{r+j}}) = 2Re(\alpha_{r+j}) \in \mathbb{R}$ and $\alpha_{r+j}\overline{\alpha_{r+j}} = |\alpha_{r+j}|^2 \in \mathbb{R}$.

2.2:
Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ ist aus doppeltem Grund uneigentlich: Der Integrand ist zunächst nur im *offenen* Intervall $(0, \infty)$ definiert, und dieses Intervall ist unbeschränkt. Zerlege dashalb zunächst

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_{(0,\pi]} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{[\pi,\infty)} \frac{\sin x}{x} dx =: I_1 + I_2$$

Setze $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ für $0 < x \leq \pi$ und $f(0) := 1$. Dann ist f stetig auf $[0, \pi]$, also regelintegrierbar, und das Regelintegral von f ist eine stetige Funktion seiner unteren Grenze. Folglich existiert

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^\pi f(x) dx = \int_0^\pi f(x) dx = \int_{(0,\pi]} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = I_1$$

$I_2 = \int_{[\pi,\infty)} \frac{\sin x}{x} dx = \lim\limits_{A \to \infty} \int_\pi^A \frac{\sin x}{x} dx$, falls dieser Limes existiert. (1)

Zu jedem $A > \pi$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N\pi \leq A < (N+1)\pi$. Folglich

$$\left| \int_\pi^A \frac{\sin x}{x} dx - \int_\pi^{N\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \int_{N\pi}^A \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_{N\pi}^A \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \leq \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$
$$\leq \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{1}{N\pi} dx \leq \frac{1}{N} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Daraus folgt $\lim\limits_{A \to \infty} \int_\pi^A \frac{\sin x}{x} dx = \lim\limits_{n \to \infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx$, falls der letztere Limes existiert. (2)

Setze $a_k := \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$, $k \in \mathbb{N}$. Dann haben die a_k alternierendes Vorzeichen.
Beh: Die $|a_k|$ bilden eine monoton fallende Nullfolge.
Bew.: Da $|\sin|$ π-periodisch ist, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \big[-\cos x\big]_0^{\pi} = 2$$

und damit

$$\frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = |a_k| \leq \frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{k\pi}$$

Daraus folgt einerseits $|a_{k+1}| \leq \frac{2}{(k+1)\pi} \leq |a_k|$, also $|a_k| \searrow$, andererseits $\lim a_k = 0$ $\square$.

Die Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k$ konvergiert daher nach dem Leibnizkriterium gegen einen Grenzwert I, folglich

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

Mit (1) und (2) folgt hieraus, dass das Integral $I_2 = \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ gegen I konvergiert.
I_2 ist aber nicht absolut konvergent, denn

$$\int_{\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k}$$

und die harmonische Reihe ist bekanntlich unbeschränkt. Folglich konvergiert $\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ nicht.

2.3:
Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{(x^2+1)^2}$ mit der Methode von Internet-Skript, S. 143 unten:

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2}$$

Definiere $r(x) := 1$, $q(x) := (x-i)^2(x+i)^2$, $a_1 := i$, $q^{\#}(x) := (x+i)^2$. Dann ist

$$A := \lim_{x\to a_1} (x-i)^2 \frac{r(x)}{q(x)} = \lim_{x\to a_1} \frac{r(x)}{q^{\#}(x)} = \frac{r(i)}{q^{\#}(i)} = \frac{1}{(2i)^2} = -\frac{1}{4}$$

Jetzt $r(x) - Aq^{\#}(x)$ durch den Linearfaktor $(x - a_1)$ dividieren (Polynomdivision):

$$r(x) - Aq^{\#}(x) = 1 + \frac{1}{4}(x+i)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}ix + \frac{3}{4} = (x-i)\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}i\right)$$

d.h. $r(x) = Aq^{\#}(x) + (x-i)\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}i\right)$, eingesetzt: $1 = -\frac{1}{4}(x+i)^2 + (x-i)\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}i\right)$, und nun durch $q(x)$ dividiert (mit Kürzen):

$$\frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x-i)^2} + \frac{1}{4}\frac{x+3i}{(x-i)(x+i)^2} \tag{1}$$

Das Verfahren am 2. Summanden in (1) analog wiederholen:
Definiere *neu*: $r(x) := x + 3i$, $q(x) := (x-i)^2(x+i)^2$, $a_1 := i$, $q^{\#}(x) := (x+i)^2$. Dann ist nun

$$A := \lim_{x \to a_1} (x-i)^2 \frac{r(x)}{q(x)} = \lim_{x \to a_1} \frac{r(x)}{q^{\#}(x)} = \frac{r(i)}{q^{\#}(i)} = \frac{i+3i}{(2i)^2} = -i$$

Wieder $r(x) - Aq^{\#}(x)$ durch den Linearfaktor $(x - a_1)$ dividieren (Polynomdivision):

$$r(x) - Aq^{\#}(x) = (x+3i) + i(x+i)^2 = ix^2 - x + 2i = (x-i)(ix-2)$$

d.h. $r(x) = Aq^{\#}(x) + (x-i)(ix-2)$, eingesetzt: $x + 3i = -i(x+i)^2 + (x-i)(ix-2)$, nun durch $q(x)$ dividiert (mit Kürzen):

$$\frac{x+3i}{(x-i)(x+i)^2} = -i\frac{1}{x-i} + \frac{ix-2}{(x+i)^2} \tag{2}$$

Die Weiterbehandlung des 2. Summanden besteht in einer letzten Division des Zählers mit Rest, durch den Faktor $(x+i)$. Dies kann man "mit bloßem Auge" erledigen:

$$\frac{ix-2}{(x+i)^2} = \frac{i(x+i)-1}{(x+i)^2} = i\frac{1}{x+i} - \frac{1}{(x+i)^2}$$

Dies in (2), sodann (2) in (1) eingesetzt, liefert insgesamt

$$\frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x-i)^2} - \frac{1}{4}i\frac{1}{x-i} + \frac{1}{4}i\frac{1}{x+i} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x+i)^2}$$

Je zwei Summanden sind hier konjugiert komplex, daher folgt

$$\frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2} = 2Re\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{(x-i)^2} - \frac{1}{4}i\frac{1}{x-i}\right) = Re\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-i)^2} - \frac{1}{2}i\frac{1}{x-i}\right)$$

Da der Realteil des Integrals gleich dem Integral über den Realteil des Integranden ist, folgt weiter:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2}dx = Re\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x-i)^2}dx - \frac{1}{2}i\int_0^1 \frac{1}{x-i}dx\right) \tag{3}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-i)^2}dx = \left[-\frac{1}{x-i}\right]_0^1 = -\frac{1}{1-i} + \frac{1}{-i} = -\frac{1+i}{(1-i)(1+i)} + \frac{i}{(-i)i} = -\frac{1+i}{2} + i = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x-i}dx = \int_0^1 \frac{x+i}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx + i\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$$

Beides in (3) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2}dx &= Re\left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right) - \frac{1}{2}i\left(\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx + i\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx\right)\right) \\ &= Re\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + i\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

2.4:

Zu berechnen sind die Ableitungen nach t von

$$f(t) := \left(\int_0^t \exp(-x^2)dx\right)^2 \quad \text{und} \quad g(t) := \int_0^1 \frac{\exp\big(-t^2(x^2+1)\big)}{x^2+1}dx.$$

Mit der Kettenregel und dem Hauptsatz folgt

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \exp(-x^2)dx\right)^2 = 2\int_0^t \exp(-x^2)dx \cdot \exp(-t^2) \tag{4}$$

Zu $g'(t)$:

Da eine Regel $\frac{d}{dx}\int \ldots = \int \frac{d}{dx} \ldots$ bisher von der Vorlesung noch nicht geliefert wurde, sondern Vertauschung von Grenzprozessen nur bei Reihen bekannt ist, entwickle den Integranden von $g(t)$ in eine (für alle x und alle t) konvergente Reihe:

$$g(t) = \int_0^1 \Big(\sum_{k\geq 0} \frac{(-t^2)^k}{k!}(x^2+1)^{k-1}\Big)dx \underset{k=0}{=} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^1 \Big(\sum_{k\geq 1} \frac{(-t^2)^k}{k!}(x^2+1)^{k-1}\Big)dx$$

Da das 1. Integral rechtsseits konstant bezüglich t ist, folgt

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^1 \Big(\sum_{k\geq 1} \frac{(-t^2)^k}{k!}(x^2+1)^{k-1}\Big)dx$$

Integration unter dem Summenzeichen:

Für festes $t \geq 0$ sei $f_k(x) := \frac{(-t^2)^k}{k!}(x^2+1)^{k-1}$, $x \in [0,1]$. Als Polynom in x ist $f_k \in R[0,1]$ und bezüglich $\| \ \|_{[0,1]}$ gilt

$$\sum_{k\geq 1} \left\| \frac{(-t^2)^k}{k!}(x^2+1)^{k-1} \right\|_{[0,1]} = \sum_{k\geq 1} \frac{t^{2k}}{k!} \left\| x^2+1 \right\|_{[0,1]}^{k-1} = \sum_{k\geq 1} \frac{t^{2k}}{k!} 2^{k-1} \leq \exp(2t^2) < \infty \tag{5}$$

Da die Reihe in $[0,1]$ gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktion konvergiert und alle Summanden Regelfunktionen sind, darf die Reihe gliedweise integriert werden, also gilt

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k\geq 1} \frac{(-t^2)^k}{k!}\int_0^1 (x^2+1)^{k-1}dx$$

Setze $a_k := \int_0^1 (x^2+1)^{k-1}dx$, $k \geq 1$. Dann ist $|a_k| \leq \int_0^1 2^{k-1}dx = 2^{k-1}$, also

$$\sum_{k\geq 1} \left| \frac{(-t^2)^k}{k!}\int_0^1 (x^2+1)^{k-1}dx \right| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{t^{2k}2^{k-1}}{k!} < \exp(2t^2) < \infty$$

d.h. zu differenzieren ist eine Potenzreihe in t, die für alle t konvergiert, also den Radius ∞ hat. Nach Satz 4.1.9 darf die Reihe gliedweise nach t differenziert werden, und auch die differenzierte Reihe hat diesen Radius. Damit folgt

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{k\geq 1} \frac{d}{dt}\frac{(-t^2)^k}{k!}\int_0^1 (x^2+1)^{k-1}dx = \sum_{k\geq 1} \frac{k(-t^2)^{k-1}(-2t)}{k!}\int_0^1 (x^2+1)^{k-1}dx \\ &= -2t\sum_{k\geq 1} \frac{(-t^2)^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^1 (x^2+1)^{k-1}dx = -2t\sum_{k\geq 0} \frac{(-t^2)^k}{k!}\int_0^1 (x^2+1)^k dx \\ &= -2t\sum_{k\geq 0} \int_0^1 \frac{(-t^2)^k}{k!}(x^2+1)^k dx \end{aligned}$$

Da bei festem t die Reihe

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(-t^2)^k}{k!}(x^2+1)^k$$

gleichmäßig in $[0,1]$ konvergiert (Rechnung ganz analog zu (5)) und ihre Summanden $\in R[0,1]$ sind, darf sie gliedweise integriert werden, d.h.

$$\sum_{k\geq 0}\int_0^1 \frac{(-t^2)^k}{k!}(x^2+1)^k dx = \int_0^1 \sum_{k\geq 0}\frac{(-t^2)^k}{k!}(x^2+1)^k dx, \text{ eingesetzt:}$$

$$g'(t) = -2t\int_0^1 \sum_{k\geq 0}\frac{(-t^2)^k}{k!}(x^2+1)^k dx = -2t\int_0^1 \exp\bigl(-t^2(x^2+1)\bigr)dx$$

Hinweis: Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Definition

$$g(t) := \int_0^1 \frac{\exp\bigl(-t^2(x^2+1)\bigr)}{x^2+1}dx,$$

so zeigt sich, dass im vorliegenden Fall die Differentiation einfach unter dem Integralzeichen ausgeführt werden durfte, d.h. hier galt

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{\exp\bigl(-t^2(x^2+1)\bigr)}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\exp\bigl(-t^2(x^2+1)\bigr)}{x^2+1}\right)dx$$

Zusammengefasst ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
F'(t) = f'(t)+g'(t) &= 2\exp(-t^2)\int_0^t \exp(-x^2)dx - 2t\int_0^1 \exp(-t^2x^2-t^2)dx \\
&= 2\exp(-t^2)\left(\int_0^t \exp(-x^2)dx - \int_0^1 \exp\left(-(tx)^2\right)t dx\right) \\
&\underset{u=tx}{=} 2\exp(-t^2)\left(\int_0^t \exp(-x^2)dx - \int_0^t \exp(-u^2)du\right) = 0
\end{aligned}$$

Aus $F'(t)=0$ für alle $t\geq 0$ folgt

$$F(t) = const = F(0) = 0 + \int_0^1 \frac{\exp(0)}{x^2+1}dx = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$