SS 2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

Lösungen zum 3. Übungsblatt zur Analysis II

3.1:

Benutze den Hinweis sowie die Gleichungen $\chi_{-n}(0) = \chi_{-n}(1) = 1$. Damit folgt:

a):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$\hat{f}(0) = \int_0^1 f(t)dt = 0.$

$$\begin{aligned} n \neq 0: \quad \hat{f}(n) &= \int_0^{1/2} \chi_{-n}(t)dt - \int_{1/2}^1 \chi_{-n}(t)dt = \frac{i}{2\pi n}\left(\left[\chi_{-n}(t)\right]_0^{1/2} - \left[\chi_{-n}(t)\right]_{1/2}^1\right) \\ &= \frac{i}{2\pi n}\Big(\big((-1)^n - 1\big) - \big(1 - (-1)^n\big)\Big) = \frac{i}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{-2i}{\pi n} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

f ist von beschränkter Variation ($V_0^1 f = V_0^{1/2} f + V_{1/2}^1 f = 2 + 2 = 4$). Nach Dirichlet-Jordan konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen

$$f^{\#}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 0,\ \frac{1}{2}. \end{cases}$$

b):

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{für } \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$\hat{f}(0) = \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{4}.$

$$\begin{aligned} n \neq 0: \ \hat{f}(n) &= \int_0^{1/2} t\chi_{-n}(t)dt + \int_{1/2}^1 (1-t)\chi_{-n}(t)dt \quad \text{, mit partieller Integration:} \\ &= \frac{i}{2\pi n}\left(\left[t\chi_{-n}(t)\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \chi_{-n}(t)dt + \left[(1-t)\chi_{-n}(t)\right]_{1/2}^1 + \int_{1/2}^1 \chi_{-n}(t)dt\right) \\ &= \frac{i}{2\pi n}\left(\left(\frac{1}{2}(-1)^n - 0\right) + \left(0 - \frac{1}{2}(-1)^n\right) - \left(\int_0^{1/2} \chi_{-n}(t)dt - \int_{1/2}^1 \chi_{-n}(t)dt\right)\right) \\ &= \frac{-i}{2\pi n}\left(\int_0^{1/2} \chi_{-n}(t)dt - \int_{1/2}^1 \chi_{-n}(t)dt\right) = \left(\frac{-i}{2\pi n}\right)\left(\frac{i}{2\pi n}\right)\left(\left[\chi_{-n}\right]_0^{1/2} - \left[\chi_{-n}\right]_{1/2}^1\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi n)^2}\Big(\big((-1)^n - 1\big) - \big(1 - (-1)^n\big)\Big) = \frac{1}{2\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{-1}{\pi^2 n^2} & n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

f ist stetig und von beschränkter Variation ($V_0^1 f = V_0^{1/2} f + V_{1/2}^1 f = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$). Nach Folgerung zu Dirichlet-Jordan konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f.

3.2: Beweis mit Skalarprodukt:
Nach Internet-Skript S.163 bildet $M := \{\chi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem im $\mathbb{C}$-Vektorraum $V_R := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ 1-periodisch}, f\big|_{[0,1]} \text{ Regelfunktion}\}$. Damit ist M linear unabhängig über $\mathbb{C}$.
Detail-Beweis: M linear unabhängig $\iff$ jede endliche Teilmenge $E \subset M$ linear unabhängig. $E := \{\chi_{k_0}, \dots, \chi_{k_n}\}$ mit $k_j \in \mathbb{Z}$ paarweise verschieden, $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \chi_{k_j} = 0 \tag{1}$$

Mit $(\chi_m|\chi_n) = \int_0^1 \chi_m(t)\chi_{-n}(t) = \delta_{mn}$ folgt für jedes $i = 0, \cdots, n$

$$0 = (0|\chi_{k_i}) = \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \chi_{k_j} \middle| \chi_{k_i} \right) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \left(\chi_{k_j} \middle| \chi_{k_i} \right) = \lambda_i.$$

Beweis mit Fundamentalsatz:
Gelte (1). Dann folgt für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \chi_{k_j}(t) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \big(\exp(-2\pi i t)\big)^{k_j}$$

Mit $w := \exp(-2\pi i t)$ folgt für alle $w \in S^1$, dass

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j w^{k_j} = 0. \tag{2}$$

Sei Œ $k_0 < k_1 < \dots < k_n$, k_j nicht notwendig ≥ 0. Multipliziere (2) mit $w^{-k_0} \in S^1$. Dann folgt $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j w^{m_j} = 0$, wobei $m_j := k_j - k_0 \geq 0$ für alle j. Das Polynom $p(x) := \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x^{m_j}$ hat unendlich viele Nullstellen $w \in S^1$, folglich $\lambda_j = 0$ für alle j.

3.3:
a) Setze $f(x) := x$, $0 \leq x < 1$, 1-periodisch fort. $f\big|_{[0,1]}$ ist von beschränkter Variation ($V_0^1 f = 2$). Daher konvergiert die Fourierreihe von f punktweise gegen

$$f^{\#}(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Berechnung der $\hat{f}(n)$:

$\hat{f}(0) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$.

$$n \neq 0: \ \hat{f}(n) = \int_0^1 t\chi_{-n}(t)dt = \frac{i}{2\pi n}\Big(\big[t\chi_{-n}(t)\big]_0^1 - \int_0^1 \chi_{-n}(t)dt \Big) = \frac{i}{2\pi n}\Big(1 - \frac{i}{2\pi n}\big[\chi_{-n}(t)\big]_0^1\Big)$$
$$= \frac{i}{2\pi n}, \qquad \text{insbesondere } \hat{f}(-n) = -\hat{f}(n).$$

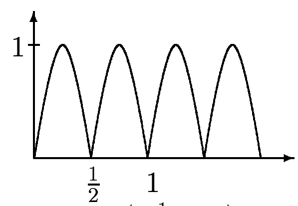
$$s_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\chi_k = \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{n}\big(\hat{f}(k)\chi_k + \hat{f}(-k)\chi_{-k}\big) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{2\pi k}\big(\chi_k - \chi_{-k}\big)$$

Wegen $\chi_k(x) - \chi_{-k}(x) = 2i\mathrm{Im}\chi_k(x) = 2i\sin(2\pi kx)$ und der obigen Konvergenzbetrachtung folgt für $0 < x < 1$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\sin(2\pi kx),$$

wie behauptet. Weiter gilt $\big(\|f\|_2\big)^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \geq \sum_{n\geq 1} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, d.h. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ konvergiert. Genauer gilt $\frac{1}{3} = \int_0^1 t^2 dt = \big(\|f\|_2\big)^2 = |\hat{f}(0)|^2 + 2\sum_{n\geq 1}|\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, woraus wieder $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ folgt.

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |\sin(2\pi x)|$



f stetig und von beschränkter Schwankung ($V_0^1 = 4$), daher konvergiert nach Folgerung 5.2.16 zu Dirichlet-Jordan die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f.
Berechnung der $\hat{f}(n)$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x) = \frac{1}{2i}\big(\chi_1 - \chi_{-1}\big) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -\sin(2\pi x) = -\frac{1}{2i}\big(\chi_1 - \chi_{-1}1\big) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\hat{f}(0) = \int_0^{1/2} \sin(2\pi t)dt - \int_{1/2}^{1} \sin(2\pi t)dt = -\frac{1}{2\pi}\Big(\big[\cos(2\pi t)\big]_0^{1/2} - \big[\cos(2\pi t)\big]_{1/2}^{1}\Big) = \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned} n \neq 0: \; \hat{f}(n) &= \int_0^1 f(t)\chi_{-n}(t)dt = \frac{1}{2i}\Big(\int_0^{1/2}\big(\chi_1 - \chi_{-1}\big)\chi_{-n}(t)dt - \int_{1/2}^{1}\big(\chi_1 - \chi_{-1}\big)\chi_{-n}(t)dt\Big) \\ &= \frac{1}{2i}\Big(\int_0^{1/2}\big(\chi_{-(n-1)} - \chi_{-(n+1)}\big)(t)dt - \int_{1/2}^{1}\big(\chi_{-(n-1)} - \chi_{-(n+1)}\big)(t)dt\Big) \end{aligned} \tag{3}$$

Wegen $\chi_0 = 1$ sind die Fälle $n = 1$ und $n = -1$ separat weiterzubehandeln:

$$\begin{aligned} \hat{f}(1) &= \frac{1}{2i}\Big(\int_0^{1/2} 1dt - \int_{1/2}^{1} 1dt - \int_0^{1/2}\chi_{-2}(t)dt + \int_{1/2}^{1}\chi_{-2}(t)dt\Big) \\ &= \frac{-i}{2}\cdot\frac{i}{4\pi}\Big(-\big[\chi_{-2}(t)\big]_0^{1/2} + \big[\chi_{-2}(t)\big]_{1/2}^{1}\Big) = \frac{1}{8\pi}\big(-(-1)^2 + 1 + 1 - (-1)^2\big) = 0 \end{aligned}$$

Analog folgt $\hat{f}(-1) = 0$. Für $n \neq 1, -1, 0$ folgt aus (3) weiter:

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2i}\Big(\frac{i}{2\pi(n-1)}\big(\big[\chi_{-(n-1)}(t)\big]_0^{1/2} - \big[\chi_{-(n-1)}(t)\big]_{1/2}^{1}\big) \\ &\quad - \frac{i}{2\pi(n+1)}\big(\big[\chi_{-(n+1)}(t)\big]_0^{1/2} - \big[\chi_{-(n+1)}(t)\big]_{1/2}^{1}\big)\Big) \\ &= \frac{1}{4\pi(n-1)}\Big(\big((-1)^{n-1} - 1\big) - \big(1 - (-1)^{n-1}\big)\Big) - \frac{1}{4\pi(n+1)}\Big(\big((-1)^{n+1} - 1\big) - \big(1 - (-1)^{n+1}\big)\Big) \end{aligned}$$

$$(-1)^{n-1} - 1 = (-1)^{n+1} - 1 = \begin{cases} -2 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Deshalb folgt weiter $\hat{f}(n) = 0$ für n ungerade, während für n gerade gilt

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{-4}{n-1} - \frac{-4}{n+1}\Big) = \frac{-2}{\pi(n^2-1)}$$

Insbesondere gilt $\hat{f}(-n) = \hat{f}(n)$. Damit folgt

$$s_n(f) = \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{n}\big(\hat{f}(k)(\chi_k + \chi_{-k}\big) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k) 2\mathrm{Re}\ \chi_k$$

und diese Reihe konvergiert gleichmäßig gegen f, d.h., wenn man $2m$ für gerades k einsetzt:

$$|\sin(2\pi x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m\geq 1}\frac{1}{4m^2-1}\cos(4\pi m x)$$

3.4:

f' stetig differenzierbar $\Rightarrow$ f' von beschränkter Variation und stetig $\Rightarrow$ die Fourierreihe von f' konvergiert gleichmäßig gegen f'. Gleiches gilt für f. Also

$$f' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f'}(n)\chi_n \qquad (\|\ \|_\infty\text{-konvergent}), \tag{4}$$

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\chi_n \qquad (\|\ \|_\infty\text{-konvergent}).$$

Vermutung: Darf f gliedweise differenziert werden?
Dann würde folgen, da $(\chi_0)' = 0$, $(\chi_n)' = 2\pi i n \chi_n$,

$$f' = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \big(2\pi i n \hat{f}(n)\big)\chi_n \tag{5}$$

Weitere, daraus folgende Vermutung:

$$\widehat{f'}(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ 2\pi i n\hat{f}(n) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6}$$

Gliedweise differenzieren um die Ableitung einer Reihe auszurechnen, darf man aber nur, wenn zuvor bekannt ist, dass die gliedweise abgeleitete Reihe (hier: (5), nicht (4)!) gleichmäßig konvergent ist, und das ist im vorliegenden Fall nicht unmittelbar zu sehen, denn die gliedweise Gleichheit von (4) und (5) (also Vermutung (6)) darf ja nicht vorausgesetzt werden.
Ausweg: Integrieren von Reihen ist einfacher als Differenzieren, also umgekehrter Weg: Beginne

bei f', gehe per Integration über zu f und vergleiche zwei Reihendarstellungen von f:
Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ gilt nach dem Hauptsatz

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = f(0) + \int_0^x \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f'}(n)\chi_n(t)dt$$

Gleichmäßig konvergente Reihen dürfen gliedweise integriert werden. Mit $\widehat{f'}(0) = \int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0) = 0$ (da f 1-periodisch) folgt

$$f(x) = f(0) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \widehat{f'}(n) \int_0^x \chi_n(t)dt = f(0) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \widehat{f'}(n)\frac{-i}{2\pi n}\big(\chi_n(x) - \chi_n(0)\big), \tag{7}$$

Darf die in (6) rechtsstehende Reihe als Differenz zweier konvergenter Reihen geschrieben werden?
Nach HS 1 zu Dirichlet-Jordan (Internet-Skript S.158) existiert, da f' von beschränkter Variation, ein $C \geq 0$, so dass $\widehat{f'}(n)| \leq \frac{C}{|n|}$, $n \neq 0$. Damit folgt für alle x, auch für $x = 0$

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \big|\widehat{f'}(n)\frac{-i}{2\pi n}\chi_n(x)\big| \leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left|\frac{\widehat{f'}(n)}{2\pi n}\right| \leq \frac{C}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2},$$

d.h. die Reihe $\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \widehat{f'}(n)\frac{-i}{2\pi n}\chi_n(x)$ ist gleichmäßig konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere konvergent für $x = 0$, und daher kann man in (7) umordnen:

$$f(x) \underset{\chi_n(0)=1}{=} \Big(f(0) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{i\widehat{f'}(n)}{2\pi n}\Big) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{-i\widehat{f'}(n)}{2\pi n}\chi_n(x) =: c_0 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} c_n\chi_n(x)$$

Da nach Obigem $\sum |c_n|$ konvergiert, folgt mit Lemma 5.2.5 (Internet-Skript S.150):
$c_n = \int_0^1 f(t)\chi_{-n}(t)dt = \hat{f}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, d.h. für $n \neq 0$

$$\hat{f}(n) = \frac{-i}{2\pi n}\widehat{f'}(n) \text{ bzw. } \widehat{f'}(n) = 2\pi i n\hat{f}(n)$$

Damit ist Vermutung (6) vollständig bewiesen und

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} (2\pi i n)\hat{f}(n)\chi_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f'}(n)\chi_n = f'$$

konvergiert gleichmäßig. Die erstere Reihe ist aber gerade die gliedweise differenzierte Fourierreihe von f. Damit ist nun die erste Vermutung bestätigt, d.h. es gilt:

Ist f 1-periodisch und zweimal stetig differenzierbar, so erhält man die Fourierreihe von f' durch gliedweises Differenzieren der Fourierreihe von f.

Alternative Lösung: Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(n) &= \int_0^1 f'(t)\chi_{-n}(t)dt = \big[f(t)\chi_{-n}(t)\big]_0^1 - \int_0^1 f(t)\chi'_{-n}(t)dt \\ &= f(1) - f(0) + 2\pi i n\int_0^1 f(t)\chi_{-n}(t)dt \\ &= 2\pi i n\hat{f}(n), \text{ und damit sind alle Vermutungen bestätigt.}\end{aligned}$$

3.5:
For $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, and $0 < \varepsilon < c|x-y|$ there exist, by definition of $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{a_n|x-c_n|\}$, some $j = j(x)$ and $k = k(y)$, $j, k \in \mathbb{N}$ with

$$a_j|x-c_j| - \varepsilon < f(x) \leq a_n|x-c_n| \text{ for all } n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

$$a_k|y-c_k| - \varepsilon < f(y) \leq a_n|y-c_n| \text{ for all } n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Chosing $n = k$ in (8) and $n = j$ in (9) we obtain

$$a_j|x-c_j| - \varepsilon < f(x) \leq a_k|x-c_k|$$

$$-a_j|y-c_j| \leq -f(y) < -a_k|y-c_k| + \varepsilon$$

and, by addition

$$a_j\big(|x-c_j| - |y-c_j|\big) - \varepsilon < f(x) - f(y) < a_k\big(|x-c_k| - |y-c_k|\big) + \varepsilon.$$

Using $|x-c_k| - |y-c_k| \leq \big||x-c_k| - |y-c_k|\big| \leq |x-y|$ (Δ-inequality) this yields

$$f(x) - f(y) < a_k|x-y| + \varepsilon,$$

on the other hand

$$f(y) - f(x) < a_j\big(|y-c_j| - |x-c_j|\big) + \varepsilon < a_j|y-x| + \varepsilon$$

and therefore

$$|f(x) - f(y)| < c|x-y| + \varepsilon \text{ for all } \varepsilon > 0, \text{ i.e.}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|.$$

It follows that f is of bounded variation: For any partition $0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(t_k) - f(t_{k+1})| \leq c \sum_{k=0}^{n-1} |t_k - t_{k+1}| = c|1-0| = c, \text{ i.e. } \mathrm{V}_0^1 f \leq c.$$