Lösungen zum 4. Übungsblatt zur Analysis II

4.1:
Zu a) Zu zeigen:
(M.1) positiv definit: $d(x,y) \geq 0$ stets, $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
(M.2) symmetrisch: $d(x,y) = d(y,x)$.
(M.3) Dreiecksungleichung: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.
Zu (M.1): $0 \leq \|x-y\|_2 \leq d(x,y) \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ gilt stets. Daraus folgt $d(x,y) \geq 0$ stets und $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$, denn entweder $\|x-y\|_2 = 0$, d.h. $x = y$, oder $\|x\|_2 + \|y\|_2 = 0$, d.h. $x = y = 0$.
Sei $x = y$. Dann sind x, y linear abhängig $\Rightarrow d(x,y) = \|x-y\|_2 = 0$.
(M.2)´ gilt, da $\|x-y\|_2 = \|y-x\|_2$ und $\|x\|_2 + \|y\|_2 = \|y\|_2 + \|x\|_2$.
Zu (M.3): 1. Fall: x, y linear abhängig, Œ $y = \lambda x$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{R}^n$ mit $z = \mu x$, dass sowohl x, z als auch z, y linear abhängig sind, also $d(x,z) + d(z,y) = \|x-z\|_2 + \|z-y\|_2 \geq \|x-y\|_2 = d(x,y)$. Alle anderen $z \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig von x und y, und aus der Δ-Ungleichung für $\| \ \|_2$ folgt für sie:
$d(x,z) + d(z,y) = (\|x\|_2 + \|z\|_2) + (\|z\|_2 + \|y\|_2) \geq \|x-z\|_2 + \|z-y\|_2 \geq \|x-y\|_2 = d(x,y)$.
2. Fall: x, y linear unabhängig. Sei $z \in \mathbb{R}^n$. Falls z von x linear abhängig ist, ist es von y linear unbhängig, also gilt $d(x,z) + d(z,y) = \|x-z\|_2 + \|z\|_2 + \|y\|_2 \geq \|x\|_2 + \|y\|_2 = d(x,y)$. Analog wenn z von y linear abhängig ist. Falls z von x und von y linear unabhängig ist, folgt $d(x,z) + d(z,y) = (\|x\|_2 + \|z\|_2) + (\|z\|_2 + \|y\|_2) \geq \|x\|_2 + \|y\|_2 = d(x,y)$. Damit ist (M.3) vollständig bewiesen.
Zu b) Sei (x_n) eine Folge des $\mathbb{R}^n$, die in dieser Metrik konvergiert, und sei $y \in \mathbb{R}^n$ ihr Grenzwert. Dann gilt $d(x_n, y) \to 0$. Wegen $d(x,y) \geq \|x-y\|_2$ konvergiert die Folge dann auch in der euklidischen Metrik gegen y. Annahme: Für unendlich viele x_n gilt: x_n, y sind linear unabhängig. Dann gibt es eine Teilfolge x_{n_k} mit $d(x_{n_k}, y) = \|x_{n_k}\|_2 + \|y\|_2 \to 0$. Daraus folgt notwendig $\|y\|_2 = 0$, also $y = 0$, im Widerspruch zu x_n, y linear unabhängig. Folgerung: Notwendig für Konvergenz ist, dass die Folge in der euklidischen Metrik gegen y konvergiert und dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass x_n, y linear abhängig sind für alle $n \geq N$. Diese doppelte Bedingung ist aber auch hinreichend, weil dann für alle $n \geq N$ gilt: $d(x_n, y) = \|x_n - y\|_2 \to 0$.
Welche Folgen sind das konkret?
Für $y = 0$ alle Folgen, die in der euklidischen Norm gegen y konvergieren; für $y \neq 0$ alle Folgen mit der Eigenschaft: x_n ist linear abhängig von y für fast alle n.

4.2:
Zu a) Es genügt zu zeigen: $\Gamma \subset X \times Y$ abgeschlossen, d.h. jeder Häufungspunkt von Γ ist Element von Γ. Sei also $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ ein Häufungspunkt von Γ. Dann gibt es eine Folge $(x_n, y_n) \subset \Gamma$ mit $(x_n, y_n) \to (\overline{x}, \overline{y})$ in der Produkttopologie von $X \times Y$, folglich $x_n \to \overline{x}$ in der Topologie von X und $y_n \to \overline{y}$ in der Topologie von Y. Aus $(x_n, y_n) \in \Gamma$ folgt $y_n = f(x_n)$. Da f stetig und $x_n \to \overline{x}$, folgt $y_n = f(x_n) \to f(\overline{x})$. Mit der Eindeutigkeit des Grenzwerts der Folge $(y_n) \subset Y$ folgt $\overline{y} = f(\overline{x})$ und damit $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Gamma$, was zu zeigen war.
Zu b) Die Strecke $\{(0,y) | -1 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ besteht aus lauter Häufungspunkten von Γ, die nicht $\in \Gamma$ sind. Also ist $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ nicht abgeschlossen und $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ nicht offen.

4.3:
Behauptung: Die Abbildung f ist stetig in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Beweis: Sei $(\overline{x}, \overline{y}) \neq (0,0)$ und $(x_n, y_n) \to (\overline{x}, \overline{y})$. Dann folgt $x_n \to \overline{x}$ und $y_n \to \overline{y}$, insbesondere $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$ für $n \gg 0$. Mit STAB folgt

$$f(x_n, y_n) = \frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} \to \frac{2\overline{x}\overline{y}}{\overline{x}^2 + \overline{y}^2} = f(\overline{x}, \overline{y}).$$

Sei $x_n \to 0$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$, $x_n \neq 0$ für alle n. Dann gilt $(x_n, x_n) \to (0,0)$, aber $f(x_n, x_n) = \frac{2x_n^2}{2x_n^2} = 1 \not\to 0 = f(0,0)$, analog $(x_n, -x_n) \to (0,0)$ und $f(x_n, -x_n) = -1 \not\to 0 = f(0,0)$, d.h. f ist nicht stetig in $(0,0)$.

4.4:
$f(0) = 0$ implies $|f(x)| = |f(0) - f(x)| \leq |f(0) - f(x)| + |f(x) - f(1)| \leq V_0^1(f) = \|f\|$ for all $x \in [0,1]$, hence

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|. \tag{1}$$

(N.1) $\|f\| \geq 0$ follows from (1). The variation of a function is equal to zero iff (= if and only if) the function is constant, therefore $f = 0 \Rightarrow \|f\| = 0$ holds trivially, and $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ follows because of $f(0) = 0$.
(N.2) and (N.3): If $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ is a partition of $[0,1]$, then for every $f, g \in V$ and $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |(\lambda f)(t_k) - (\lambda f)(t_{k+1})| = |\lambda| \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_k) - f(t_{k+1})| \leq |\lambda| V_0^1(f) \text{ and}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |(f+g)(t_k) - (f+g)(t_{k+1})| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \big(|f(t_k) - f(t_{k+1})| + |g(t_k) - g(t_{k+1})|\big) \leq V_0^1(f) + V_0^1(g),$$

whence $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ and $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Therefore $\| \; \|$ is a norm on V.
We now show that every Cauchy sequence in V converges to an element of V, i.e. $(V, \| \; \|)$ is complete: Let $(f_n) \subset V$ be a Cauchy sequence in $(V, \| \; \|)$, i.e. for every $\varepsilon > 0$ there exists $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ such that

$$\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \text{ for all } n, m \geq N_\varepsilon. \tag{2}$$

Inequality (1) leads to

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \text{ for all } n, m \geq N_\varepsilon,$$

therefore $(f_n(x)) \subset \mathbb{C}$ is a Cauchy sequence in $\mathbb{C}$ for every $x \in [0,1]$. Proposition 5.0.1 (internet script p.139) ensures the existence of $f(x) := \lim f_n(x) \in \mathbb{C}$ for every $x \in [0,1]$, especially $f(0) = 0$.
So we have $f : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ and
$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ for all $n, m \geq N_\varepsilon$ and all $x \in [0,1]$
$\Rightarrow |f(x) - f_m(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ for all $n, m \geq N_\varepsilon$ and all $x \in [0,1]$
$\Rightarrow \|f - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ for all $n, m \geq N_\varepsilon$
$\Rightarrow f_n \underset{\| \; \|_\infty}{\longrightarrow} f.$ (3)

We shall show that f is of bounded variation, i.e. $f \in V$, and that $f_n \underset{\| \|}{\longrightarrow} f$.

For a given partition of $[0,1]$ and all $m \in \mathbb{N}$ we have

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \big|f(t_k) - f(t_{k+1})\big| &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big|\big(f(t_k) - f_m(t_k)\big) + \big(f_m(t_k) - f_m(t_{k+1})\big) + \big(f_m(t_{k+1}) - f(t_{k+1})\big)\Big| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_k) - f_m(t_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |f_m(t_k) - f_m(t_{k+1})| + \sum_{k=0}^{n-1} |f_m(t_{k+1}) - f(t_{k+1})| \\
&\leq n \cdot \|f - f_m\|_\infty + V_0^1(f_m) + n \cdot \|f_m - f\|_\infty \\
&= 2n\|f - f_m\|_\infty + \|f_m\|.
\end{aligned}$$

For all $m \geq N_\varepsilon$ we have

$$\|f_m\| = \|f_{N_\varepsilon} + f_m - f_{N_\varepsilon}\| \leq \|f_{N_\varepsilon}\| + \|f_m - f_{N_\varepsilon}\| \leq \|f_{N_\varepsilon}\| + \varepsilon,$$

hence, by chosing $\varepsilon = 1$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \big|f(t_k) - f(t_{k+1})\big| \leq 2n\|f - f_m\|_\infty + \|f_{N_1}\| + 1 \text{ for all } m \geq N_1.$$

Because of $f_m \underset{\| \|_\infty}{\longrightarrow} f$ there exists $N^* \in \mathbb{N}$ such that $\|f - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{2n}$ for all $m \geq N^*$. So by taking some $m \geq \max\{N_1, N^*\}$ we obtain

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(t_k) - f(t_{k+1})| \leq \|f_{N_1}\| + 2 =: C \text{ for all partitions of } [0,1],$$

so f is of bounded variation.

Given $\varepsilon > 0$ take some N_ε as in (2). Then for every $j, m \geq N_\varepsilon$ and for every partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ of $[0,1]$ we have

$$\varepsilon \geq \|f_j - f_m\| \geq \sum_{k=0}^{n-1} |(f_j - f_m)(t_k) - (f_j - f_m)(t_{k+1})|$$

With STAB we obtain, as $| \, | : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ is continuous,

$$\begin{aligned}
\varepsilon \quad &\geq \quad \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |(f_j - f_m)(t_k) - (f_j - f_m)(t_{k+1})| \\
&= \quad \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{j\to\infty} \Big|\big(f_j(t_k) - f_m(t_k)\big) - \big(f_j(t_{k+1}) - f_m(t_{k+1})\big)\Big| \\
&= \quad \sum_{k=0}^{n-1} \Big|\big(\lim_{j\to\infty} f_j(t_k) - f_m(t_k)\big) - \big(\lim_{j\to\infty} f_j(t_{k+1}) - f_m(t_{k+1})\big)\Big| \\
&= \quad \sum_{k=0}^{n-1} |(f - f_m)(t_k) - (f - f_m)(t_{k+1})| \text{ for all } m \geq N_\varepsilon
\end{aligned}$$

Taking the supremum over all partitions, we get $\varepsilon \geq V_0^1(f - f_m) = \|f - f_m\|$ for all $m \geq N_\varepsilon$, so

$$f \underset{\| \|}{\longrightarrow} f, \text{ and } V \text{ is complete.}$$