## Lösungen zum 6. Übungsblatt zur Analysis II

**6.1:** $p_n$ ist stetig auf $[0,1]$ und bild$p_n \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, folglich $p_n \in V$ für alle $n \in N$ und somit $U \subset V$.
Beh: $U \neq V$.
Bew: $U = \text{span}\{p_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Polynome mit komplexen (oder auch reellen) Koeffizienten, im Definitionsbereich eingeschränkt auf $[0,1]$. Sei $f := \exp\big|_{[0,1]}$. Trivialerweise gilt $f \in V$. Wäre $f \in U$, so wäre $f$ ein Polynom $n$-ten Grades für ein $n \geq 1$, folglich wäre die $n+1$-te Ableitung von $f$ identisch Null, aber wegen $\exp' = \exp$ gilt $f^{(n+1)} = f \neq 0$, ein Widerspruch zur Annahme. □.
Beh: $U^\perp = \{0\}$.
Bew: Sei $g \in U^\perp$. Wir zeigen: Dann ist $g \in V^\perp$, daraus folgt dann $g = 0$.
Sei $f \in V$ beliebig gegeben, $f = f_1 + if_2$ mit $f_1 = \text{Re}f$ und $f_2 = \text{Im}f$. Nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz sind sowohl $f_1$ wie $f_2$ gleichmäßiger Limes von Poynomen mit reellen Koeffizienten, d.h. es gibt Folgen $(q_n)$, $(r_n) \subset U$ mit $\|q_n - f_1\|_\infty \to 0$ und $\|r_n - f_2\|_\infty \to 0$. nach Voraussetzung gilt $(q_n|g) = (r_n|g) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, da $g$ stetig und somit $\|g\|_\infty < \infty$,

$$\begin{aligned}(f|g)| &= |(f_1|g) + i(f_2|g)| \leq |(f_1|g)| + |(f_2|g)| = |(f_1 - q_n|g)| + |(f_2 - r_n|g)| \\ &= \left|\int_0^1 (f_1 - q_n)(t)\overline{g(t)}dt\right| + \left|\int_0^1 (f_2 - r_n)(t)\overline{g(t)}dt\right| \\ &\leq \|f_1 - q_n\|_\infty\| \cdot \|g\|_\infty + \|f_2 - r_n\|_\infty\| \cdot \|g\|_\infty \to 0,\end{aligned}$$

d.h. $(f|g) = 0$ und damit $U \oplus U^\perp = U \oplus \{0\} = U \neq V$.

**6.2:** Sei der metrische Raum $(X,d)$ vollständig und $\emptyset \neq A \subset X$.
a) Sei $A$ vollständig und $x \in X$ Häufungspunkt von $A$. Zu zeigen: $x \in A$, denn dann ist $A$ abgeschlossen.
Nach Def. Häufungspunkt gibt es eine Folge $(x_n) \subset A$ mit $x_n \underset{d}{\longrightarrow} x$. Folglich $(x_n) \subset A$ Cauchy-Folge. Da $A$ vollständig, besitzt die Folge einen Grenzwert $y \in A$. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt $y = x$, also $x \in A$.
b) Sei $A$ abgeschlossen und $(x_n) \subset A$ eine Cauchy-Folge. Zu zeigen: Diese besitzt eine Grenzwert $\in A$, denn dann ist $A$ vollständig.
Da $X$ vollständig ist, besitzt die Folge einen Grenzwert $x \in X$. In jeder $\varepsilon$-Umgebung von $x$ liegen fast alle $x_n \in A$, also ist $x$ ein Häufungspunkt von $A$. Wegen $A$ abgeschlossen folgt $x \in A$.

**6.3:** Integrand stetig auf Quader $\Rightarrow$ Integral unabhängig von Integrationsreihenfolge (Satz 6.2.10, Internet-Skript S.190).

Zu (1): $X := [1,2] \times [0,1]$

$$\begin{aligned}
\int_X \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy &= \int_0^1 \left( \int_1^2 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy = \int_0^1 \left( \int_1^2 \frac{(x+y)-2y}{(x+y)^3} dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left( \int_1^2 \frac{dx}{(x+y)^2} - 2y \int_1^2 \frac{dx}{(x+y)^3} \right) dy \\
&= \int_0^1 \left( \left[ -\frac{1}{x+y} \right]_{x=1}^{x=2} - 2y \left[ -\frac{1}{2(x+y)^2} \right]_{x=1}^{x=2} \right) dy \\
&= \int_0^1 \left( -\frac{1}{2+y} + \frac{1}{1+y} + \frac{y}{(2+y)^2} - \frac{y}{(1+y)^2} \right) dy \\
&= \int_0^1 \left( -\frac{1}{2+y} + \frac{1}{1+y} + \frac{(2+y)-2}{(2+y)^2} - \frac{(1+y)-1}{(1+y)^2} \right) dy \\
&= \int_0^1 \left( -\frac{2}{(2+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \right) dy = \left[ \frac{2}{2+y} \right]_0^1 + \left[ -\frac{1}{1+y} \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Zu (2): $X := [0,1] \times [0,1]$. Erst nach $y$ integrieren:

$$\begin{aligned}
\int_X x^3 \exp(-x^2 y) dxdy &= \int_0^1 x^3 \left( \int_0^1 \exp(-x^2 y) dy \right) dx = \int_0^1 x^3 \left[ -\frac{\exp(-x^2 y)}{x^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 x^3 \left( -\frac{\exp(-x^2)}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_0^1 \left( -x \exp(-x^2) + x \right) dx \\
&= \left[ \frac{1}{2} \exp(-x^2) + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{\exp(-1)}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2e}
\end{aligned}$$

Zu (3): (Das Integral berechnet das Volumen der Pyramide mit dem Quadrat $[-1,1] \times [-1,1]$ als Grundfläche.) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$. Also $f(x,y) = |1 - \max\{|x|,|y|\}|$ für $\max\{|x|,|y|\} \le 1$ und $f(x,y) = 0$ sonst, d.h. $f(x,y) = 1 - \max\{|x|,|y|\}$ für $-1 \le x, y \le 1$, insbesondere ist $tr(f) = [-1,1] \times [-1,1]$ und das Integral wohldefiniert. Da der Integrand $f$ symmetrisch in $x$ und $y$ definiert ist, ist die Integrationsreihenfolge egal. $\max\{|x|,|y|\} = |y|$ für $-|y| \le x \le |y|$ und $= |x|$ sonst. Daher

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 \left(1 - \max\{|x|,|y|\}\right) dx \right) dy \\
&= \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 dx - \int_{-1}^1 \max\{|x|,|y|\} dx \right) dy \\
&= \int_{-1}^1 \left( 2 - \left( \int_{-1}^{-|y|} |x| dx + \int_{-|y|}^{|y|} |y| dx + \int_{|y|}^1 |x| dx \right) \right) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left( 2 - \left( \int_{-1}^{-|y|} (-x) dx + |y| \cdot 2|y| + \int_{|y|}^1 x dx \right) \right) dy \\
&= \int_{-1}^1 \left( 2 - \left( 2 \int_{|y|}^1 x dx + 2y^2 \right) \right) dy = \int_{-1}^1 \left( 2 - \left( \left[ x^2 \right]_{|y|}^1 + 2y^2 \right) \right) dy \\
&= \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = \left[ y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

**6.4:** (integral equation with $g(x) := -x,\ K(x,y) := \sin(xy)$)
The normed vector space over the reals $\left(C\left[0, \frac{1}{4}\right], \|\ \|_\infty\right)$ is complete. For every $f \in C\left[0, \frac{1}{4}\right]$ define $L(f)$ by

$$L(f)(x) := x + \int_0^{1/4} \sin(xy) f(y) dy, \qquad \text{for all } x \in \left[0, \tfrac{1}{4}\right]$$

For given continouous $f$ the mapping $L(f) : \left[0, \frac{1}{4}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto L(f)(x)$ is continuous, hence $L(f) \in C\left[0, \frac{1}{4}\right]$. Therefore $f \mapsto L(f)$ defines a mapping $C\left[0, \frac{1}{4}\right] \longrightarrow C\left[0, \frac{1}{4}\right]$. We will show that $L$ is a contraction and compute the contracting factor $\Delta$ as small as possible:
For any $f_1, f_2 \in C\left[0, \frac{1}{4}\right]$

$$\begin{aligned}
\|L(f_1) - L(f_2)\|_\infty &= \sup_{x \in [0,1/4]} |L(f_1)(x) - L(f_2)(x)| = \sup_{x \in [0,1/4]} \left| \int_0^{1/4} \sin(xy)\big(f_1(y) - f_2(y)\big) dy \right| \\
&\leq \sup_{x \in [0,1/4]} \int_0^{1/4} |sin(xy)| \cdot |f_1(y) - f_2(y)| dy \\
&\leq \|f_1 - f_2\|_\infty \sup_{x,y \in [0,1/4]} \int_0^{1/4} \sin(xy) dy = \|f_1 - f_2\|_\infty \int_0^{1/4} \sin\left(\tfrac{y}{4}\right) dy \quad (^*) \\
&= \|f_1 - f_2\|_\infty \cdot 4 \int_0^{1/16} \sin t dt = \|f_1 - f_2\|_\infty \cdot 4(1 - \cos(\tfrac{1}{16})) \\
&\leq 0,00781 \cdot \|f_1 - f_2\|_\infty \\
(^*) \text{ oder } &\leq \|f_1 - f_2\|_\infty \int_0^{1/4} \frac{y}{4} dy = \|f_1 - f_2\|_\infty \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = 2^{-7}\|f_1 - f_2\|_\infty \\
&\leq 0,0078125 \cdot \|f_1 - f_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Take $\Delta := 0,00781$ (oder 0,0078125). Then

$$\|L(f_1) - L(f_2)\|_\infty \leq \Delta \|f_1 - f_2\|_\infty \text{ for all } f_1, f_2 \in C\left[0, \tfrac{1}{4}\right].$$

As this vector space is complete, the theorem of Banach yields the existence of exactly one $f \in C\left[0, \frac{1}{4}\right]$ such that $f = L(f)$, i.e. $f(x) = L(f)(x)$ for all $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ or

$$f(x) = x + \int_0^{1/4} \sin(xy) f(y) dy \qquad \text{for all } x \in \left[0, \tfrac{1}{4}\right].$$

Furthermore if we chose any $f_0 \in C\left[0, \frac{1}{4}\right]$ and take $f_{n+1} := L(f_n)$ for $n \in \mathbb{N}$, then

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \|L(f_0) - f_0\|_\infty \cdot \frac{\Delta^n}{1 - \Delta}$$

(internet script p.183). We want to find some $f_0$ and $n \in \mathbb{N}$ such that $\|L(f_0) - f_0\|_\infty \cdot \frac{\Delta^n}{1-\Delta} \leq 10^{-4}$. In order to compute $\|L(f_0) - f_0\|_\infty$ without much effort, let us take $f_0 := 0$. Then $L(f_0)(x) = x$ for all $x$, ie. $L(f_0) = id_{[0,1/4]}$ and $\|L(f_0) - f_0\|_\infty = \|id_{[0,1/4]}\|_\infty = \frac{1}{4}$ . This yields the condition
$\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{0,00781^n}{1 - 0,00781} \overset{!}{\leq} 10^{-4}$
$\Rightarrow 0,00781^n \leq 4(1 - 0,00781) \cdot 10^{-4} = 0,00396\ldots$
So it is sufficient to take $n = 2$ and $g := f_2 = L(id)$. $g(x) = L(id)(x) = x + \int_0^{1/4} \sin(xy) y dy$
$\Rightarrow g(0) = 0$ and, for $0 < x \leq \frac{1}{4}$,
$g(x) = x + \left[-\frac{1}{x}\cos(xy)\right]_{y=0}^{y=1/4} + \int_0^{1/4} \frac{\cos(xy)}{x} dy = x - \frac{1}{4x}\cos\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{x}{4}\right).$