Lösungen zum 7. Übungsblatt zur Analysis II

7.1: Vor: X, Y metrische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ stetig. Zu zeigen: X kompakt $\Rightarrow f^{-1}$ stetig.
Bew: Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen stets abgeschlossen sind. Nenne $g := f^{-1} : Y \longrightarrow X$. Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Zu zeigen: $g^{-1}(A) \subset Y$ abgeschlossen.
Bew. hierfür: Aus X kompakt und A abgeschlossen folgt A kompakt. Aus A kompakt und f stetig folgt $B := f(A)$ kompakt. aus B kompakt folgt B abgeschlossen $\subset Y$. Aber

$$B = f(A) \iff g(B) = g \circ f(A) \iff g(B) = A \iff B = g^{-1}(A)$$

7.2: Zu a): Sei $\mathcal{A}_0 := \{f \in \mathcal{A} \mid f \text{ reellwertig}\}$. Dann ist $\mathcal{A}_0 \subset C(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ und aus der Voraussetzung $f, g \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow f \pm g,\ f \cdot g,\ \lambda f \in \mathcal{A}$ folgt $f, g \in \mathcal{A}_0, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f \pm g,\ f \cdot g,\ \lambda f \in \mathcal{A}_0$ d.h. $\mathcal{A}_0$ ist eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $C(X)$. Da $1 \in \mathcal{A}$ und 1 reellwertig, ist $1 \in \mathcal{A}_0$. Außerdem ist $\mathcal{A}_0$ punktetrennend: Denn da $\mathcal{A}$ nach Voraussetzung punktetrennend ist, gibt es zu $a, b \in X$, $a \neq b$, ein $h \in \mathcal{A}$ mit $h(a) = 0$, $h(b) \neq 0$. Da nach Voraussetzung mit $h \in \mathcal{A}$ auch $\overline{h} \in \mathcal{A}$, sind aber die reellwertigen $h_1 :=\mathrm{Re}h = \frac{1}{2}(h + \overline{h})$ und $h_2 :=\mathrm{Im}h = \frac{1}{2i}(h - \overline{h})$ beide $\in \mathcal{A}$, also auch $\in \mathcal{A}_0$, außerdem $h_1(a) = h_2(a) = 0$ und $h_1(b)$, $h_2(b)$ nicht beide $= 0$, d.h. $h_i(a) = 0$ und $h_i(b) \neq 0$ gilt für mindestens ein $i \in \{1, 2\}$. Mit dem Approximationssatz von Weierstrass (Internet-Skript S.187) folgt: $\mathcal{A}_0$ liegt dicht in $\big(C(X), \|\ \|_\infty\big)$, d.h. jede Funktion $\in C(X)$ ist gleichmäßiger Limes einer Folge von Funktionen $\in \mathcal{A}_0$.
Sei nun $f \in C(X, \mathbb{C})$ beliebig. Dann sind $f_1 :=\mathrm{Re}f$ und $f_2 :=\mathrm{Im}f$ in $C(X)$, also gibt es Folgen (f_n^1), $(f_n^2) \subset \mathcal{A}_0$, die gleichmäßig auf X gegen f_1 bzw. f_2 konvergieren. $f_n := f_n^1 + if_n^2 \in \mathcal{A}$ für alle $n \in N$ und die Folge (f_n) konvergiert gleichmaßig auf X gegen f. Damit ist bewiesen, dass $\mathcal{A}$ dicht in $C(X, \mathbb{C})$ liegt.
Zu b): Setze $X := S^1$. Dann ist X kompakt, da beschränkt und abgeschlossen $\subset \mathbb{R}^2$. Sei

$$\mathcal{A} := \Big\{f : S^1 \to \mathbb{C} \mid z :\mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k, n \in \mathbb{N},\ c_k \in \mathbb{C}\Big\}.$$

Dann ist $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$-Unteralgebra von $C(S^1, \mathbb{C})$ und $1 \in \mathcal{A}$, denn $\sum_{k=-n}^{n} c_k z^k = 1$ für $n = 0, c_0 = 1$. Wegen $\overline{z^k} = z^{-k}$ für $z \in S^1$ ist mit $f \in \mathcal{A}$ stets auch $\overline{f} \in \mathcal{A}$. $h := id_{S^1}$ ist eine punktetrennende Abbildung $\in \mathcal{A}$, denn $h(z) = z = \sum_{k=-1}^{1} c_k z^k$ für $c_{-1} = c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Nach Teil a) liegt somit $\mathcal{A}$ dicht in $C(S^1, \mathbb{C})$.
Sei nun $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und 1-periodisch. Dann gibt es nach Bemerkung 5.2.4 [2] (Internet-Skript S.150) eindeutig ein $g \in C(S^1, \mathbb{C})$ mit $f(t) = g(\exp(2\pi it)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zu g gibt es nach Teil a) eine Folge $(g_n) \subset \mathcal{A}$ mit $\|g_n - g\|_\infty \to 0$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in S^1$. Daraus folgt $|g_n(\exp(2\pi it) - g(\exp(2\pi it)| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Setzt man nun $f_n(t) := g_n(\exp(2\pi it)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so gilt

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Wegen $g_n \in \mathcal{A}$ gibt es für g_n eine Darstellung $g_n(z) = \sum_{k=-N_n}^{N_n} c_k^n z^k$, folglich

$$f_n(t) = \sum_{k=-N_n}^{N_n} c_k^n \big(\exp(2\pi it)\big)^k = \sum_{k=-N_n}^{N_n} c_k^n \exp(2\pi ikt) = \sum_{k=-N_n}^{N_n} c_k^n \chi_k(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

d.h. f_n ist ein trigonometrisches Polynom. Wegen (1) lässt sich f also gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren.
Diese Aussage unterscheidet sich in zweierlei Hinsicht von Folgerung 5.2.6 zum Satz von Dirichlet-Jordan: Einerseits wird in der dortigen Folgerung zusätzlich verlangt, dass f von beschränkter Variation sei. Andererseits wird dort weitergehend behauptet, dass die c_k^n die Fourierkoeffizienten von f seien, genauer: $c_k^n = \hat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und unabhängig von $n \in \mathbb{N}$.
Nach Lemma 5.2.5 (Internet-Skript S.150), sind die c_k wenigstens immer dann die Fourierkoeffizienten der dargestellten Funktion, wenn die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$ konvergiert, d.h. wenn die Folge $s_n := \sum_{k=-n}^{n} c_k \chi_k$ für $n \to \infty$ gleichmäßig **und absolut** konvergiert.
Aufgabe 7.2 liefert also für 1-periodische stetige Funktionen f, die nicht von beschränkter Variation sind, (Beisp.: $f(x) := x \sin(\frac{\pi}{x})$ für $x \in [0, 1)$, 1-periodisch fortgesetzt) eine gleichmässige Approximation durch trigonometrische Polynome, wobei aber nicht nur der Grad des Polynoms, sondern evtl. auch sämtlichen Koeffizienten von einem Polynom zum nächsten ausgewechselt werden müssen (anders als bei den $s_n(f) := \sum_{k=n}^{n} \hat{f}(k)\chi_k$).

7.3: (Freiwillig) Beh.: Sind $a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$ paarweise verschieden, so sind die Funktionen $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |t - a_k|$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$.
Bew.: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ derart, dass $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$. Dann ist $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k |t - a_k| = 0$ für alle $t \in [0, 1]$. Zu zeigen: $\lambda_k = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$.
Setze speziell $t = 0$, $t = a_1, \dots, a_n$ sowie $t = 1$ ein: Man erhält $n + 2$ Bedingungsgleichungen für die λ_k:

$$\begin{array}{ll} [0] & \sum_k \lambda_k a_k = 0 \\ [j] & \sum_k \lambda_k |a_j - a_k| = 0, \quad j = 1, \dots, n \\ [n+1] & \sum_k \lambda_k (1 - a_k) = 0 \end{array}$$

Addieren von [0] zu [n+1] ergibt

$$[n+1]' \ \sum_k \lambda_k = 0$$

OE $0 \le a_1 < a_2 < \dots < a_n \le 1$.

Wegen $|a_j - a_k| = \begin{cases} a_k - a_j & j < k \\ 0 & j = k \\ a_j - a_k & j > k \end{cases}$

ist Gleichung [j] äquivalent zu

$$[j]' \qquad \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k (a_j - a_k) + \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k (a_k - a_j) = 0, \quad (j = 1, \dots, n)$$

Aus $[n + 1]'$ folgt $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$. Addiert man dies zu $[j]'$, so ergibt sich

$$[j]'' \qquad \sum_{k=1}^{j-1} (2\lambda_k a_j - \lambda_k a_k) + \lambda_j a_j + \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k a_k = 0, \quad (j = 1, \dots, n)$$

Subtrahiert man [0] von $[j]''$, so erhält man

$$[j]''' \qquad \sum_{k=1}^{j-1} \big(2\lambda_k a_j - 2\lambda_k a_k\big) = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Für $j = 1$ ist das trivial, aber für $j = 2, \dots, n$ liefert es

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k (a_j - a_k) = 0$$

Ergänzt man diese $n-1$ Gleichungen um die Gleichung $[n+1]'$ als letzte, so ergibt sich in Matrixschreibweise die Bedingung

$$\begin{pmatrix} a_2-a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3-a_1 & a_3-a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_4-a_1 & a_4-a_2 & a_4-a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-a_1 & a_n-a_2 & a_n-a_3 & \dots & a_n-a_{n-1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem mit einer Dreiecksmatrix A, deren Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist, d.h.

$$\det A = \prod_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) \neq 0$$

Damit folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, was zu zeigen war.
Folgerung: Annahme: $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto |x-y|$ lässt sich in der Form

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{n} u_j(x)v_j(y)$$

schreiben mit geeigneten $N \in \mathbb{N}$ und $u_j, v_j \in C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Dann gilt für jedes feste $a \in [0,1]$ und $f_a : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_a(x) := |x-a|$ mit $\lambda_j := v_j(a) \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$f_a(x) = f(x,a) = \sum_{j=1}^{N} u_j(x)v_j(a) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j u_j(x) \text{ für alle } x \in [0,1],$$

d.h. $f_a = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j u_j \in span\{u_1, \ldots, u_N\} =: U$. Aber U ist ein höchstens N-dimensionaler Unterraum von $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, während die Menge $\{f_a \mid a \in [0,1]\}$ nach dem Vorigen ein unedliches System linear unabhängiger Vektoren ist, ein Widerspruch.
Damit ist am Beispiel $X := Y := [0,1]$ gezeigt, dass $C(X) \otimes C(Y)$ i.a. ein echter Unterraum von $C(X \times Y)$ ist (denn $f \in C(X \times Y)$, aber $f \notin C(X) \otimes C(Y)$).

7.4: Eindeutige Existenz der Nullstelle $\overline{x} \in (a,b)$:
$f(a) < 0 < f(b)$ und f differenzierbar, also stetig $\Rightarrow$ nach ZWS besitzt f (mindestens) eine Nullstelle in (a,b). $f' > 0$ auf $[a,b] \Rightarrow f$ streng monoton wachsend auf $[a,b] \Rightarrow f$ besitzt höchstens eine Nullstelle in $[a,b]$. Aus beidem folgt die Existenz genau einer Nullstelle in (a,b). Insbesondere folgt

$$f(x) \begin{cases} < 0 & x \in [a, \overline{x}) \\ = 0 & x = \overline{x} \\ > 0 & x \in (\overline{x}, b]. \end{cases} \tag{2}$$

Konvergenz der Folge gegen die Nullstelle:
$F = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ist nach der Quotientenregel differenzierbar in $[a,b]$ und

$$F'(x) = 1 - \frac{\big(f'(x)\big)^2 - f(x)f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} = f(x) \cdot \underbrace{\frac{f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2}}_{>0 \text{ n.Vor.}}$$

Mit (2) folgt $F'(x) \begin{cases} < 0 & x \in [a, \overline{x}) \\ = 0 & x = \overline{x} \\ > 0 & x \in (\overline{x}, b] \end{cases}$

$\Rightarrow F$ ist streng monoton fallend in $[a, \overline{x})$, streng monoton steigend in $(\overline{x}, b]$ und besitzt in $\overline{x}$ ein lokales und absolutes Minimum. Nach Definition von F folgt aus $f(\overline{x}) = 0$, dass

$$F(\overline{x}) = \overline{x}, \text{ d.h. } \overline{x} \text{ ist ein Fixpunkt von } F.$$

Damit folgt

$$F(x) > \overline{x} \text{ für alle } x \neq \overline{x}. \tag{3}$$

Sei nun $x_0 := b$, $x_{n+1} := F(x_n)$ und $T := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n > x_{n+1} > \overline{x}\}$.
$n = 0:$ $x_1 = F(b) \underset{(3)}{\Rightarrow} x_1 > \overline{x}$, außerdem $x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b = x_0$ wegen $f(b) > 0$. Folglich $0 \in T$.
$n \to n+1$: Aus $x_n > x_{n+1} > \overline{x}$ folgt mit dem streng monotonen Wachstum von F in $(\overline{x}, b]$ und mit (3) $F(x_n) > F(x_{n+1}) > \overline{x}$, d.h. $x_{n+1} > x_{n+2} > \overline{x}$ und somit $n+1 \in T$. Damit ist $T = \mathbb{N} \Rightarrow$ die Folge (x_n) ist streng monoton fallend und durch $\overline{x}$ nach unten beschränkt. Sie besitzt daher einen Limes $\tilde{x} \in \mathbb{R}$.
F differenzierbar, also stetig $\Rightarrow F(x_n) \to F(\tilde{x})$. Mit $F(x_n) = x_{n+1} \to \overline{x}$ und der Eindeutigkeit des Limes folgt $\tilde{x} = \overline{x}$.