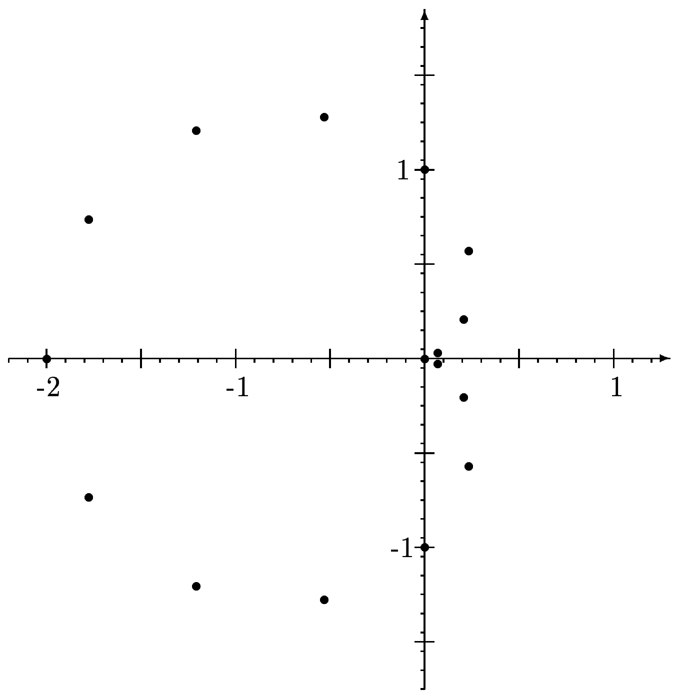
Lösungen zum 8. Übungsblatt zur Analysis II

8.1: Bildpunkte der Kurve $t \mapsto \big((1-\cos t)\cos t, (1-\cos t)\sin t\big)$ für $t = k \cdot \frac{\pi}{8}$, $k = 1, \dots, 16$.



4.2: Sei wie in Aufgabe 6.3 $f(x) := \begin{cases} \big|1 - \|x\|_\infty\big|, & \|x\|_\infty \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$.

Dann gilt

$$f(Az) = \begin{cases} \big|1 - \|Az\|_\infty\big| & \|Az\|_\infty \le 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$\text{und } g(z) = \begin{cases} \big|1 - \|Az\|_\infty\big| & \|z\|_1 \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn wir zeigen können, dass $\|Az\|_\infty \le 1 \iff \|z\|_1 \le 1$, dann gilt

$$g(z) = f(Az) \text{ für alle } z \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

und wir können die Substitutionsformel 6.2.18 (Internet-Skript S.194) benutzen.
Sei $K_1 := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\|_1 \le 1\}$ und $K_\infty := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\|_\infty \le 1\}$. K_∞ ist im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ ein achsenparalleles Quadrat um den Ursprung mit Kantenlänge 2. K_1 ist ein Quadrat um den Ursprung mit Ecken bei $(1,1)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ und $(0,-1)$. Es ist dem Einheitskreis einbeschrieben und hat die Kantenlänge $\sqrt{2}$. Die Matrix A bewirkt zunächst eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$, also um 45%,

sodann eine Streckung um den Faktor $\sqrt{2}$. Dabei wird K_1 um seinen Mittelpunkt, den Ursprung, gedreht, bis die Kanten achsenparallel sind, danach werden die Kantenlängen um den Faktor $\sqrt{2}$ vergrößert, also auf die Länge 2 gebracht. Daraus folgt: Das Bild von K_1 unter der linearen Abbildung $z \mapsto Az$ ist gerade K_∞. Damit ist (1) bewiesen. Weil lineare Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ immer stetig sind und die Abbildung f stetig in $\mathbb{R}^2$ ist (trivial), ist $g : z \mapsto f(Az)$ stetig in $\mathbb{R}^2$, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(z)dz = \int_{\mathbb{R}^2} f(Az)dz = \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^2} f(Az)|\det A|dz \underset{6.2.18}{=} \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^2} f(z)dz \underset{Aufg.6.3}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

8.3: Setze $f(t) := t\sin\frac{1}{t}$ für $0 < t \leq 1$ und $f(0) := 0$. Dann ist $c(t) = \big(t, f(t)\big)$ für alle $t \in [0,1]$ und $L(c) = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\|c(t_k) - c(t_{k+1})\|_2 \mid 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1,\ n \in \mathbb{N}_+\right\}$. Aber

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\|c(t_k) - c(t_{k+1})\|_2 &= \sum_{k=0}^{n-1}\|(t_k - t_{k+1}, f(t_k) - f(t_{k+1})\|_2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\big(t_k - t_{k+1}\big)^2 + \big(f(t_k) - f(t_{k+1})\big)^2} \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1}\big|f(t_k) - f(t_{k+1})\big|\end{aligned}$$

Wenn f nicht von beschränkter Schwankung ist, ist also c nicht rektifizierbar. Für beliebiges $n \geq 1$ betrachte die Zerlegung $0 < \frac{2}{n\pi} < \frac{2}{(n-1)\pi} < \ldots < \frac{2}{k\pi} < \ldots < \frac{2}{\pi} < 1$. Bequemlichkeitshalber numeriere $t_0 := 1$, $t_k := \frac{2}{k\pi}$ für $k = 1, ..., n$ und $t_{n+1} := 0$. (Also absteigend nach Größe geordnet). Dann folgt

$$L(c) \geq \sum_{k=0}^{n}\big|f(t_k) - f(t_{k+1})\big| \geq \sum_{k=1}^{n-1}\big|f(t_k) - f(t_{k+1})\big| = \sum_{k=1}^{n-1}\big|t_k\sin(\tfrac{1}{t_k}) - t_{k+1}\sin(\tfrac{1}{t_{k+1}})\big|$$

Aber für $1 \leq k \leq n$ ist $\sin(\frac{1}{t_k}) = \sin(\frac{k\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \pm 1 & k \text{ ungerade}\end{cases}$

$\Rightarrow \big|t_k\sin(\frac{1}{t_k}) - t_{k+1}\sin(\frac{1}{t_{k+1}})\big| = \begin{cases} |t_{k+1}| & k \text{ gerade} \\ |t_k| & k \text{ ungerade}\end{cases}$

Wegen $t_k > t_{k+1} > 0$ folgt $\Rightarrow \big|t_k\sin(\frac{1}{t_k}) - t_{k+1}\sin(\frac{1}{t_{k+1}})\big| \geq t_{k+1}$ stets, also

$$L(c) \geq \sum_{k=1}^{n-1} t_{k+1} = \sum_{k=2}^{n} t_k = \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \text{ für alle } n \geq 1, \text{ d.h. } L(c) = V_0^1(f) = \infty.$$

8.4.: a) If $a_j := (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ is the j-th line of $A = (a_{jk}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, then ${}^t\overline{a_j} = \begin{pmatrix} \overline{a_{j1}} \\ \vdots \\ \overline{a_{jn}} \end{pmatrix}$ is the j-th column of $A^* = {}^t\overline{A}$. For $AA^* =: B = (b_{jk})$ the relation $b_{jk} = a_j \cdot {}^t\overline{a_k}$ is known, therefore

$$\operatorname{spur}(AA^*) = \sum_{j=1}^n b_{jj} = \sum_{j=1}^n a_j\ {}^t\overline{a_j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}\overline{a_{jk}} = \sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2 = \|A\|_2^2.$$

b) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitian $\Rightarrow A = A^*$ and there exists $C = (c_{jk}) \in U(n)$ (i.e. $C^* = C^{-1}$) such that $A = CDC^*$, where $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ contains the (real) eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ of A. By a) we know that $\|A\|_2^2 = \operatorname{spur}(AA^*) = \operatorname{spur}(A^2) = \sum_{j=1}^n b_{jj}$. But $A^2 = (CDC^*)(CDC^*) = CD^2C^*$, so $\operatorname{spur}(A^2) = \operatorname{spur}(CD^2C^*)$. Using the fact that quite generally $\operatorname{spur}AB = \operatorname{spur}BA$, we obtain $\operatorname{spur}(C \cdot D^2C^*) = \operatorname{spur}(D^2C^* \cdot C) = \operatorname{spur}(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$.
2^{nd} proof (by elementary computation of $\sum_{j=1}^n b_{jj}$):
If $c_j := (c_{j1}, \dots, c_{jn})$ is the j-th line of C, then $(c_{j1}\lambda_1^2, \dots, c_{jn}\lambda_n^2)$ is the j-th line of CD^2, and in order to obtain b_{jj} this line must be multiplied by the j-th column of C^* i.e. ${}^t\overline{c_j} = \begin{pmatrix} \overline{c_{j1}} \\ \vdots \\ \overline{c_{jn}} \end{pmatrix}$.

Using the fact that the colums c^k of C are orthonormal, we get

$$b_{jj} = (c_{j1}\lambda_1^2, \dots, c_{jn}\lambda_n^2) \begin{pmatrix} \overline{c_{j1}} \\ \vdots \\ \overline{c_{jn}} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n c_{jk}\lambda_k^2\overline{c_{jk}} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |c_{jk}|^2$$
$$\|A\|_2^2 \underset{a)}{=} \sum_{j=1}^n b_{jj} = \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |c_{jk}|^2 \Big) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \Big(\sum_{j=1}^n |c_{jk}|^2 \Big) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \|c^k\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$$

c) A hermitian, $t \in [0,1] \Rightarrow tA$ hermitian $\Rightarrow \exp(itA) \in U(n)$ (LA II) $\Rightarrow$ the curve $c : [0,1] \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $t \mapsto c(t) := \exp(itA)$ maps into the group $U(n)$, so we have $c(t)c(t)^* = E_n$ for all $t \in [0,1]$.
$\dot{c}(t) = \dfrac{d}{dt}\exp(itA) = iA\exp(itA) = iAc(t)$.
(It is easily shown that A commutes with $\exp(itA)$, so $\dot{c}(t) = \exp(itA)iA = ic(t)A$ is also true.)

$$\begin{aligned} \|\dot{c}(t)\|_2^2 &= \operatorname{spur}\big(\dot{c}(t)\dot{c}(t)^*\big) = \operatorname{spur}\big(iAc(t)(iAc(t))^*\big) = \operatorname{spur}\big(iAc(t)c(t)^*(iA)^*\big) = \operatorname{spur}\big(iAE_n(-iA)\big) \\ &= \operatorname{spur}(A^2) \underset{b)}{=} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \end{aligned}$$
$\|\dot{c}(t)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j^2}$ for all $t \in [0,1]$
$$L(c) = \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|_2\, dt = \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j^2}.$$