Lösungen zum 9. Übungsblatt zur Analysis II

9.1.: $\overline{X}$ compact, $f : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuous $\Longrightarrow f$ takes its maximum and its minimum in some points $x_1, x_2 \in \overline{X}$ respectively.
If x_1, x_2 are both in $\overline{X} \setminus X$, i.e. $\in \partial X$, then $f(x_1) = f(x_2) = 0$ according to $f\big|_{\partial X} = 0$. It follows that $f = 0$ and the gradient of f vanishes everywhere.
If Œ $x_1 \in X$, then x_1 is an inner point of X, as X is open, therefore f has a local maximum in $x_1 \in X$ and $\mathrm{grad} f(x_1) = 0$ by corollar 7.1.7.

9.2.: Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $f(x) = \|x\|_2 \cdot x = \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{1/2} x$. f hat also die Komponentenfunktionen $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{1/2} x_i$, $(i = 1, \dots, n)$. Diese sind an der Stelle $x = 0$ nicht partiell differenzierbar, aber für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ ist $\|x\|_2 > 0$ und es gilt nach der Produktregel

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{-\frac{1}{2}} 2x_k x_i + \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \frac{x_i x_k}{\|x\|_2} + \delta_{ik}\|x\|_2$$

In $\mathbb{R}^n \setminus 0$ sind die reellwertigen Abbildungen $x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)$ somit stetig für alle $i, k = 1, \dots, n$. Daraus folgt, dass f in der offenen Menge $\mathbb{R}^n \setminus 0$ differenzierbar ist, und für jedes feste $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ ist die lineare Abbildung $Df(\bar{x}) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Df(\bar{x})(x) \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
Df(\bar{x})(x) &= \big(Jf(\bar{x})\big) \cdot x = \frac{1}{\|\bar{x}\|_2}\big(\bar{x}_i\bar{x}_k + \delta_{ik}\|\bar{x}\|_2^2\big) \cdot x \\
&= \frac{1}{\|\bar{x}\|_2}\begin{pmatrix} \bar{x}_1\bar{x}_1 + \|\bar{x}\|_2^2 & \bar{x}_1\bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_1\bar{x}_n \\ \bar{x}_2\bar{x}_1 & \bar{x}_2\bar{x}_2 + \|\bar{x}\|_2^2 & \dots & \bar{x}_2\bar{x}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_n\bar{x}_1 & \bar{x}_n\bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n\bar{x}_n + \|\bar{x}\|_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\|\bar{x}\|_2}\begin{pmatrix} \bar{x}_1(\bar{x}|x) + \|\bar{x}\|_2^2 \cdot x_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n(\bar{x}|x) + \|\bar{x}\|_2^2 \cdot x_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\|\bar{x}\|_2}\big((\bar{x}|x)\cdot\bar{x} + (\bar{x}|\bar{x})\cdot x\big) = \frac{(\bar{x}|x)}{\|\bar{x}\|_2}\cdot\bar{x} + \|\bar{x}\|_2 \cdot x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Differenzierbarkeit in $\bar{x} = 0$:
Wählt man $L_0 := 0 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $r(x) := f(x)$, so gilt wegen $f(0) = 0$

D1: $f(x) = f(0) + L_0(x - 0) + r(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

D2: $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{r(x)}{\|x - 0\|_2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{\|x\|_2} = \lim_{x\to 0} x = 0$

Wegen der Eindeutigkeit einer solchen Darstellung ist somit $Df(0) = L_0 = 0 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

9.3.: (Die Reihenfolge der Arbeitsschritte ist üblicherweise wie folgt:)
1. Existieren die partiellen Ableitungen und sind sie stetig? Klammere zunächst den Problempunkt von f, also den Ursprung, aus. In $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ gilt (Produkt- und Kettenregel):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sin\Big(\frac{1}{x^2+y^2}\Big) - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\Big(\frac{1}{x^2+y^2}\Big)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\sin\Big(\frac{1}{x^2+y^2}\Big) - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\Big(\frac{1}{x^2+y^2}\Big)$$

Nach STAB sind diese partiellen Ableitungen stetig in der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, also gilt dort: f stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow$ f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig.
Sie sind aber nicht stetig nach $\bar{z} = (0,0)$ fortsetzbar. Denn wähle $z_n = (x_n, y_n)$ mit $x_n = y_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. Dann gilt $z_n \to \bar{z}$, $\dfrac{1}{x_n^2+y_n^2} = n\pi$, $\sin\Big(\dfrac{1}{x_n^2+y_n^2}\Big) = 0$, $\cos\Big(\dfrac{1}{x_n^2+y_n^2}\Big) = (-1)^n$ und somit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = -\dfrac{2x_n^3}{4x_n^4}(-1)^n = (-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{\pi n}}{2}$, und diese Folge ist unbeschränkt. Analoges gilt für die andere partielle Ableitung.
2. An die Eigenschaften von f im Punkte $\bar{z} = 0$ tastet man sich vorsichtig heran und geht dabei auf die Definitionen zurück.
Zuerst die schwächste Eigenschaft: Ist f stetig in $\bar{z} = 0$? Dazu sei $z_n := (x_n, y_n)$ eine beliebige Folge mit $z_n \to \bar{z}$. Dann folgt $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, sowie $|f(x_n,y_n)| \le |x_n| \cdot |y_n| \to 0$, also existiert $\lim_{z\to\bar{z}} f(z_n)$ und ist $= 0 = f(\bar{z})$, d.h. f ist stetig in $\bar{z} = 0$.
Die zweitschwächste Eigenschaft: Existieren die partiellen Ableitungen im Punkt $\bar{z} = 0$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{\|(x,0)-(0,0)\|_2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{0-0}{\|(x,0)-(0,0)\|_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{\|(0,y)-(0,0)\|_2} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x\neq 0}} \frac{0-0}{\|(0,y)-(0,0)\|_2} = 0$$

Also ist f in $\bar{z} = 0$ partiell, aber nicht stetig partiell differenzierbar.
Zuletzt die stärkste Eigenschaft: Ist f in $\bar{z} = 0$ differenzierbar? Wenn ja, dann gilt

$$f(z) = f(0) + L_{\bar{z}}(z-0) + r(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{r(z)}{\|z-0\|_2} = 0$$

mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $L_{\bar{z}} = Df(0,0)$ und einer eindeutig bestimmten Restfunktion r. Dann kennen wir aber schon die Matrix der linearen Abbildung $Df(0,0) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ bezüglich der kanonischen Basen: Sie ist gleich der Jacobi-Matrix

$$Jf(0,0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial g}(0,0)\Big) = \mathrm{grad} f(0,0) = (0,0),$$

d.h. notwendig folgt $Df(0,0) =$ Nullabbildung und $r = f$. Folglich gilt: f ist genau dann in $\bar{z} = 0$ differenzierbar, wenn gilt

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{f(z)}{\|z-0\|_2} = 0. \tag{1}$$

Überprüfung von (1): Sei $z_n := (x_n, y_n)$ eine beliebige Folge mit $z_n \to \bar{z}$, $z_n \neq 0$. Dann gilt wegen $\|\sin\|_2 = 1$

$$\left|\frac{f(x_n, y_n)}{\|(x_n, y_n)\|_2}\right|^2 \leq \frac{x_n^2 y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}$$

Wegen $z_n \neq 0$ ist $x_n \neq 0$ oder $y_n \neq 0$. Falls x_n gleich 0 ist, ist der rechte Bruch $= 0$. Falls $x_n \neq 0$ ist, folgt durch Kürzen von Zähler und Nenner durch x_n^2 weiter

$$\frac{x_n^2 y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{y_n^2}{1 + \left(\frac{y_n}{x_n}\right)^2} \leq y_n^2 \to 0$$

Damit ist (1) bewiesen, d.h. f ist differenzierbar in $\bar{z} = 0$.
Bemerkung: Zum Beweis, dass f in $\bar{z} = 0$ stetig, partiell differenzierbar und differenzierbar ist, genügt es natürlich, nur (1) zu zeigen. Daraus folgt alles.

9.4.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen so dass $tX \subset X$ für alle $t \in (0,1]$ und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}\big(f(tx)\big) = Df(tx)\Big(\frac{d}{dt}(tx)\Big) = Df(tx)(x) = (\mathrm{grad} f(tx)|x)$$

(1) $\Rightarrow$ (2): Gelte (1), d.h. sei f homogen vom Grade λ. Dann ist $f(tx) = t^\lambda f(x)$ für alle $x \in X$ und alle $t \in (0,1]$. Es folgt $\frac{d}{dt} f(tx) = \lambda t^{\lambda-1} f(x)$, also $(\mathrm{grad} f(tx)|x) = \lambda t^{\lambda-1} f(x)$ für alle $x \in X$ und alle $t \in (0,1]$. $t := 1$ eingesetzt, liefert $(\mathrm{grad} f(x)|x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in X$, d.h. (2) gilt.
(2) $\Rightarrow$ (1): Gelte $(\mathrm{grad} f(x)|x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in X$. (*)
Zu zeigen: $f(tx) = t^\lambda f(x)$ für alle $t \in (0,1]$, d.h. zu zeigen: für festes $x \in X$ ist die Funktion $h : (0,1] \to \mathbb{R}$, $h(t) := f(tx) \cdot t^{-\lambda}$ konstant, nämlich gleich $h(1) = f(x)$. Dazu zeige, dass $h'(t) = 0$ ist.
Beweis hierfür: Nach der Produktregel ist

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \frac{d}{dt} f(tx) \cdot t^{-\lambda} - \lambda f(tx) \cdot t^{-\lambda-1} \\
&= (\mathrm{grad} f(tx)|x) \cdot t^{-\lambda} - \lambda f(tx) \cdot t^{-\lambda-1} \\
&= (\mathrm{grad} f(tx)|tx) \cdot t^{-\lambda-1} - \lambda f(tx) \cdot t^{-\lambda-1} \\
&= \big((\mathrm{grad} f(y)|y) - \lambda f(y)\big) t^{-\lambda-1} \text{ mit } y := tx \in X \\
&\underset{(*)}{=} 0
\end{aligned}$$

Anwendung: $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}, A = (a_{jk}) \mapsto \det A$ ist stetig differenzierbar, da $\det A$ ein Polynom in den a_{ik} ist. Außerdem ist $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, d.h. det ist homogen vom Grade n. Folglich ist

$$D\det(A)(A) = (\mathrm{grad} \det A|A) = n \cdot \det A$$