Skript zur Vorlesung

Analysis II

Marburg, Sommersemester 2000

Friedrich W. Knöller

Fortsetzung des Skripts zur Analysis I, WS 1999/2000

Literaturverzeichnis

[1] Bröcker, Theodor: Analysis in mehreren Variablen: einschl. gewöhnl. Differentialgleichungen und des Satzes von Stokes, Teubner, 1980

[2] Lang, Serge: Analysis I, II Addison-Wesley. 1968

[3] Dieudonné, Jean: Foundations of Modern Analysis, Bd.1, Academic Press. 1960

ergänzend

[4] Forster, Otto: Analysis 1, 2 Vieweg. 1999

[5] Barner, Martin und Flohr, Friedrich: Analysis I, II de Gruyter.19XX

[6] Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis Teil 1, 2 Teubner. 19XX

Kapitel 5

Verschiedenes

5.0 Komplexe Zahlen

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist nichts anderes als die Menge $\mathbb{R}^2$ der Tupel $z = (x, y)$ reeller Zahlen zusammen mit der komponentenweisen Addition

$$(z, z') \longmapsto z + z' := (x + x', y + y')$$

und der Multiplikation $\quad (z, z') \longmapsto z \cdot z' := (xx' - yy', xy' + x'y).$

$0 := (0, 0)$ ist das neutrale Element der Addition, $1 := (1, 0)$ das neutrale Element der Multiplikation und

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

ist das multiplikative Inverse von $(x, y) \neq 0$. Für die sogenannte imaginäre Einheit $i := (0, 1)$ ist $i^2 = -1$, insbesondere lässt sich also $\mathbb{C}$ nicht anordnen. Die beiden Vektoren 1 und i bilden die kanonische $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$; deshalb hat jede komplexe Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

wofür man (historisch bedingt)

$$z = x + iy$$

schreibt. $x = Re(z)$ nennt man den Realteil von z, $y = Im(z)$ den Imaginärteil. Vermöge der Einbettung $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto (x, 0)$, wird $\mathbb{R}$ zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$. Die Konjugation $z = x + iy \longmapsto \overline{z} := x - iy$ ist ein Automorphismus von $\mathbb{C}$, der genau $\mathbb{R}$ festlässt, d.h.

(1) $\overline{\overline{z}} = z$

(2) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$

(3) $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Außerdem ist

(4) $z + \overline{z} = 2Re\, z, \quad z - \overline{z} = 2i\, Im\, z$

Das Skalarprodukt $(z, w) \longmapsto Re(z \cdot \overline{w})$ induziert den Betrag $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der komplexen Zahl $z = x + iy$. Offenbar gilt

(1) $|z| = |\overline{z}|$

(2) $|\overline{z}|^2 = z.\overline{z}$

(3) $|Re\, z|, \ |Im\, z| \leq |z|$

(4) $|Re\ (z \cdot \overline{w})| \leq |z| \cdot |w|$

Satz 5.0.0.
Die Abbildung $z \longmapsto |z|$ hat folgende Eigenschaften:

N1: $|z| \geq 0, \ \ |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

N2: $|z.z'| = |z|.|z'|$

N3: $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Beweis : Die Abbildung $z \longmapsto |z|$ kommt von einem Skalarprodukt (vgl. LA I). □

Wegen N1 − N3 hat man in $\mathbb{C}$ (wie in $\mathbb{R}$) den Begriff

- der beschränkten Folge
- der konvergenten Folge/Reihe
- der Cauchy-Folge
- der stetigen Funktion.

Satz 5.0.1.

(z_n) *Folge komplexer Zahlen.*

äq

(i) (z_n) *konvergent*

(ii) (z_n) *Cauchy-Folge*

(iii) $(Re\, z_n), \ \ (Im\, z_n)$ *konvergent.*

Folgerung 5.0.2.
Jede beschränkte Folge (z_n) *komplexer Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.*

Folgerung 5.0.3.
$\sum_{n\geq 0} |z_n|$ *konvergent* $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 0} z_n$ *konvergent.*

Theorem 5.0.4.
Die Exponentialreihe

$$\exp(z) := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ *und es gilt*

(1) $z \longmapsto \exp(z)$ *stetig*

(2) $\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$

(3) $\exp(it) = \cos t + i \sin t,\ \ t \in \mathbb{R}$.

Insbesondere:

$$|\exp z| = \exp Re\, z$$
$$|\exp it| = 1.$$

Folgerung 5.0.5.
Zu jedem $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *gibt es genau ein* $0 \leq t < 2\pi$*, so dass*

$$z = |z| \cdot (\cos t + i \sin t).$$

Die 1-deutig bestimmte reelle Zahl $0 \leq t < 2\pi$ *heißt das Argument von* z*,* $t := \arg z$*.*

Beweis : vgl. A I □

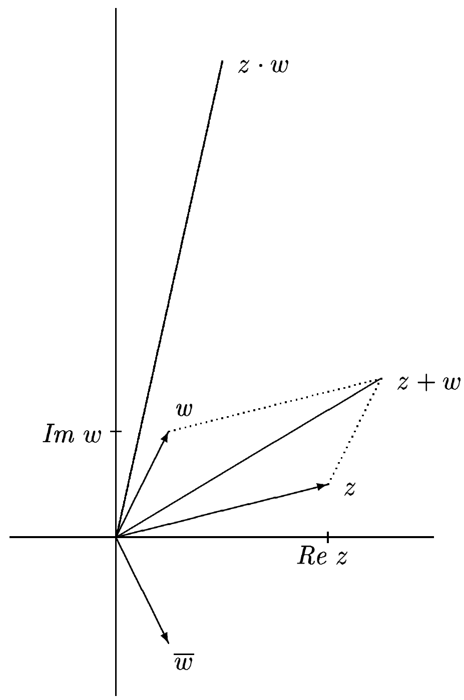
Bemerkung 5.0.6.
Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*,$$
$$z \longmapsto \exp(2\pi i z)$$

ist ein surjektiver Homomorphismus (= Epimorphismus) von der abelschen Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ *auf die abelsche Gruppe* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ *mit Kern* $\mathbb{Z}$*, d.h.*

$$\mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}.$$

Bemerkung 5.0.7. *Geometrische Interpretation*



Das Produkt zweier komplexer Zahlen addiert die Winkel und multipliziert die Längen.

Theorem 5.0.8.
Jedes komplexe Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

vom Grade $n \geq 1$ hat eine komplexe Nullstelle.

Folgerung 5.0.9.
$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist surjektiv.

Folgerung 5.0.10. *Es gibt $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, so dass*

$$p(z) = a_n(z - c_1) \cdot \ldots \cdot (z - c_n).$$

Beweis von 5.0.10: Sei $c \in \mathbb{C}$ so dass $p(c) = 0$. Dann gilt
$p(z) = p(z) - p(c) = (z - c) \cdot q(z)$ mit grad $q \leq n - 1$. Induktion. □

[HS] 1
$r \geq 0$, $B_r(0) := \{z \mid |z| \leq r\}$, $f : B_r(0) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ stetig.
Dann gibt es ein $z^* \in B_r(0)$, so dass

$$f(z^*) \leq f(z) \text{ für alle } |z| \leq r.$$

Beweis : $s := \inf \text{ bild } f$ existiert. Wähle Folge $z_n \in B_r(0)$, so dass $f(z_n) \to s$.
Œ $z_n \to z^* \in B_r(0)$. Dann: $s = f(z^*)$. □

[HS] 2
Ist p ein komplexes Polynom, so hat $p \cdot \overline{p}$ ein globales Minimum.

Beweis : Es genügt folgendes zu zeigen:
Es gibt ein $r \geq 0$, so dass

$$p(z) \cdot \overline{p(z)} \geq C := p(0) \cdot \overline{p(0)} \text{ für alle } |z| \geq r.$$

Œ $n \geq 1$, $a_n = 1$. Für $|z| \gg 0$ ist

$$|p(z)| \geq |z|^n \left| 1 - \frac{1}{|z|^n} \left| a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \right| \right| \geq \frac{1}{2} |z|^n.$$

□

[HS] 3
p komplexes Polynom vom Grade $n \geq 1, z^* \in \mathbb{C}$

äq

(i) $p \cdot \overline{p}$ nimmt sein Minimum in z^* an.

(ii) z^* ist eine Nullstelle von p.

Beweis : $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$
(ii) $\Rightarrow$ (i): trivial
(i) $\Rightarrow$ (ii): Œ $z^* = 0, p(0) = a_0 = 1$.
Für $w \in S^1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| = 1 \right\}$ sei $f_w : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $f_w(t) := p(wt) \cdot \overline{p(wt)} = \sum_{k=0}^{2n} A_k(w) t^k$ wobei

$$A_k(w) := \sum_{i+j=k} a_i w^i \overline{a}_j \overline{w}^j.$$

Dann ist für alle $w \in S^1$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$

$$1 = f_w(0) \leq f_w(t) = 1 + \sum_{k=1}^{2n} A_k(w) t^k.$$

Sei $1 \leq k \leq n$ minimal mit $a_k \neq 0$. Dann ist für $1 \leq j < k$ der Koeffizient $A_j(w) = 0$ und

$$\sum_{j=k}^{2n} A_j(w) t^j \geq 0 \text{ für alle } w \in S^1, t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Nach Division durch $t^k > 0$ und anschließendem Übergang zur Grenze $t = 0$ folgt

$$A_k(w) = a_k w^k + \overline{a}_k \overline{w}^k \geq 0,\ w \in S^1.$$

Sei $\xi := \exp \frac{\pi i}{k}$. Dann ist $\xi w \in S^1$, $\xi^k = -1$, also

$$0 \leq A_k(\xi w) = -A_k(w) \leq 0,$$

d.h.
$$0 = A_k(w) = a_k w^k + \overline{a}_k \overline{w}^k \text{ für alle } w \in S^1.$$

Folglich hat das Polynom $a_k z^{2k} + \overline{a}_k$ unendlich viele Nullstellen, also $a_k = 0$, ein Widerspruch. $\square$

5.0.11. *Integration rationaler Funktionen* *(nicht Teil der Vorlesung)*

Eine rationale Funktion R ist ein Funktion

$$z \mapsto R(z) := \frac{p(z)}{q(z)} \text{ mit komplexen Polynomen } p, q,\ q \neq 0.$$

R ist bis auf die endlich vielen Nullstellen von q definiert und stetig. Aufgrund des euklidschen Algorithmus gibt es 1-deutig bestimmte Polynome g, r so dass

(1) $R(z) = g(z) + \frac{r(z)}{q(z)}$

(2) *grad* $r <$ *grad* q.

Lemma: *Es existieren 1-deutig bestimmte*
paarweise verschiedene komplexe Zahlen $a_1, \cdots, a_k$
natürliche Zahlen $n_1, \cdots, n_k$
sowie komplexe Zahlen $A_j^{(1)}, \cdots, A_j^{(n_j)},\ j = 1, \ldots, k$
so dass

(1) $\mathrm{grad}\, q = n_1 + \cdots + n_k$

(2) $q(z) = const \cdot (z - a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_k)^{n_k}$

(3) $\frac{r(z)}{q(z)} = \sum_{j=1}^k \left[\frac{A_j^{(1)}}{z - a_j} + \cdots + \frac{A_j^{(n_j)}}{(z - a_j)^{n_j}} \right]$

(4) $A_j^{(n_j)} = \lim_{z \to a_j} (z - a_j)^{n_j} \frac{r(z)}{q(z)}$

Beweis :
$q(z) = const \cdot (z - a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_k)^{n_k}$ nach FA.
Sei $q^\sharp(z) := \frac{q(z)}{(z - a_1)^{n_1}}$, $A := \lim_{z \to a_1} (z - a_1)^{n_1} \cdot \frac{r(z)}{q(z)}$. Dann ist
$r(z) - A \cdot q^\sharp(z) = r_1(z)(z - a_1) + \varrho(z)$, grad $\varrho < 1$.

Da das linke Polynom in a_1 verschwindet, ist $\varrho = 0$,
$\operatorname{grad} r_1 \leq \max\{\operatorname{grad} r_1, \operatorname{grad} q^\sharp\} - 1 < \operatorname{grad} q - 1$

$$\frac{r(z)}{q(z)} = \frac{A}{(z-a_1)^{n_1}} + \frac{r_1(z)}{q_1(z)}$$

mit $q_1(z) = (z-a_1)^{n_1 - 1} q^\sharp(z)$, $\operatorname{grad} q_1 < \operatorname{grad} q$. $\square$

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{C}$. Dann gibt es 1-deutig bestimmte reelle Funktionen $u, v : I \to \mathbb{R}$, so dass $f = u + iv$ nämlich

$$u(x) := Re\, f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)})$$

bzw.

$$v(x) := Im\, f(x) = -\frac{1}{2}(f(x) - \overline{f(x)})$$

Sind u, v differenzierbar bzw. lokale Regelfunktionen, so definiert man

$$f' := u' + iv'$$

und

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx.$$

Theorem 5.0.12.
Jede rationale Funktion ist 'elementar'[1] integrierbar, d.h. besitzt eine explizite Stammfunktion.

Beweis : Bis auf ein Polynom hat eine rationale Funktion R die Form

$$\sum \left(\cdots + \frac{c}{(x-a)^n} + \cdots \right), \quad c,\, a \in \mathbb{C}$$

Daher genügt es zu zeigen, dass $x \mapsto (x-a)^{-n}$, $n \geq 1$, eine Stammfunktion hat. Für $n > 1$ ist $\frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$ Stammfunktion. Für $n = 1$ und $a \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto \frac{1}{2}\log(x-a)^2$ Stammfunktion. Für $n = 1$ und $a \notin \mathbb{R}$ führt die Substitution

$$x = Im\, a \cdot u + Re\, a$$

auf die Integration von

$$u \mapsto \frac{1}{u-i} = \frac{u}{u^2+1} + i\frac{1}{u^2+1}$$

mit der Stammfunktion

$$u \mapsto \frac{1}{2}\log(u^2+1) + i \arctan(u).$$

$\square$

[1] Das **elliptische Integral** $\int_0^a (1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} dt, 0 < k < 1$, ist z.B. nicht elementar integrierbar.