## 5.1 Uneigentliche Integrale

$J \subset \mathbb{R}$ nicht ausgeartetes Intervall, $\overset{\circ}{J} \subset J$ die Menge der inneren Punkte von J, d.h.

$$\overset{\circ}{J} = \{\overline{x} \in J |\, \text{es gibt ein } \varepsilon > 0, \text{ so dass } (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon) \subset J\}$$

Gegeben sei $f : J \to \mathbb{R}$, so dass $f\big|_{\overset{\circ}{J}}$ lokale Regelfunktion, d.h. $f\big|_{[a,b]}$ Regelfunktion für alle $[a, b] \subset \overset{\circ}{J}$.

**Definition 5.1.0.**

(1) *$f$ über $J$ uneigentlich integrierbar mit Integral $I \in \mathbb{R} :\Leftrightarrow$*
*$\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $[A, B] \subset \overset{\circ}{J}$ so dass*

$$|I - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon \text{ für alle } [A, B] \subset [a, b] \subset \overset{\circ}{J}$$

(2) *$f$ über $J$ integrierbar $:\Leftrightarrow$ $f, |f|$ über $J$ uneigentlich integrierbar.*

*Für den 1-deutig bestimmten (verallgemeinerten) Grenzwert $I$ schreibt man*

$$I = I_J(f) = \int_J f(x)dx \quad \text{oder}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx, \text{ falls } J \text{ die Grenzen } a \leq b \text{ hat,}$$

*und sagt, dass das uneigentliche Integral $\int_J f(x)dx$ konvergiert bzw. absolut konvergiert.*

**EX:**

[1] $J = [1, \infty)$, $f(x) = x^{-s}$. Das Integral $\int_J x^{-s}ds$ konvergiert absolut für $s > 1$, und

$$\int_J x^{-s}ds = \int_1^\infty \frac{1}{x^s}ds = \frac{1}{s-1}.$$

[2] $J = [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Dann gilt

$$\int_o^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

**Bemerkung 5.1.1.**

[1] *J, J' Intervalle derart, dass*

$$\overset{\circ}{J} \subset J' \subset J.$$

$f : J \to \mathbb{R}$, *so dass* $f\big|_{\overset{\circ}{J}}$ *lokale Regelfunktion.*

*äq*

*(i)* $f$ *über* $J$ *uneigentlich integrierbar.*

*(ii)* $f\big|_{J'}$ *über* $J'$ *uneigentlich integrierbar.*

*Konvergiert eines der beiden Integrale* $I_J(f)$ *bzw.* $I_{J'}(f\big|_{J'})$, *so konvergieren beide Integrale und stimmen überein.*

[2] $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Regelfunktion. Dann ist* $f$ *über* $[a, b]$ *integrierbar und*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} \dots = \int_{[a,b)} \dots = \int_{(a,b]} \dots = \int_{(a,b)} \dots ,$$

*d.h. das uneigentliche Integral verallgemeinert den Begriff des Regelintegrals.*

**Satz 5.1.2.**

$f : J \to \mathbb{R}$ *so dass* $f\big|_{\overset{\circ}{J}}$ *lokale Regelfunktion.*

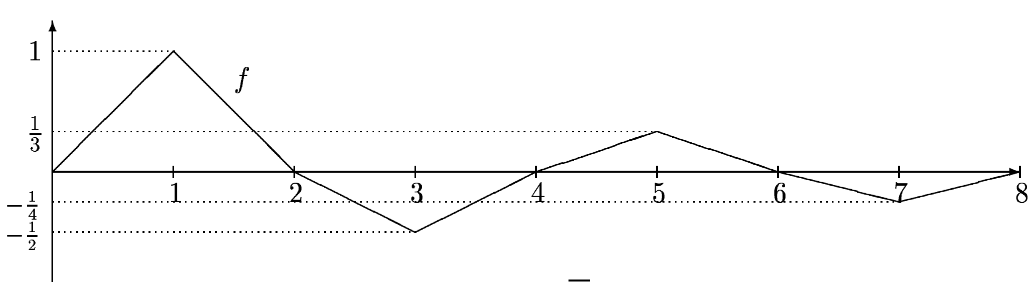
*äq*

(i) $f : J \to \mathbb{R}$ *integrierbar*

(ii) *Es gibt ein* $C \geq 0$, *so dass*

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq C \text{ für alle } [a, b] \subset \overset{\circ}{J}.$$

**Ex:**




$f$ uneigentlich integrierbar über $\overline{\mathbb{R}}_+$, aber nicht integrierbar.

*Beweis von 5.1.2:*
(i) $\Rightarrow$ (ii): $I := \int_J |f(x)|dx$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es $[A,B] \subset \overset{\circ}{J}$, so dass

$$\left| I - \int_a^b |f(x)|dx \right| < 1 \text{ für alle } [A,B] \subset [a,b] \subset \overset{\circ}{J}.$$

Sei $[\alpha,\beta] \subset \overset{\circ}{J}$ beliebig. Wähle $[a,b] \subset \overset{\circ}{J}$, so dass $[A,B] \cup [\alpha,\beta] \subset [a,b]$. Dann ist

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|dx \le \int_a^b |f(x)|dx \le 1 + I =: C$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$, $0 \le f_\pm \le |f|$, $f_\pm\big|_{\overset{\circ}{J}}$ lokale Regelfunktionen.
$0 \le \int_a^b f_\pm(x)dx \ \le \int_a^b |f(x)|dx \le C$. Daher existiert

$$I_J(f_\pm) = \sup\left\{ \int_a^b f_\pm(x)dx \middle| [a,b] \subset \overset{\circ}{J} \right\},$$

$$I_J(f) = I_J(f_+) - I_J(f_-),\ I_J(|f|) = I_J(f_+) + I_J(f_-).$$

$\square$

**Ex**: ***Eulersche*** $\Gamma$***-Funktion***
$s > 0$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{s-1} \cdot \exp(-x)$.
$f$ ist stetig und damit eine lokale Regelfunktion.

**Theorem 5.1.3.** *Für $s > 0$ konvergiert*

$$\int_0^\infty x^{s-1} \exp(-x)dx$$

*absolut. Die* ***Eulersche*** $\Gamma$***-Funktion***

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} \exp(-x)dx$$

*genügt der Funktionalgleichung*

$$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s), \quad s > 0.$$

**Folgerung 1:** $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}_+$.

**Folgerung 2:** $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = \int_\mathbb{R} \exp(-x^2)dx$.

*Beweis des Theorems:*

Œ $1 \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+$.
Für $x \geq 1$ ist $x^{s+1} \exp(-x) \leq const$, also

$$\int_1^b x^{s-1} \exp(-x) dx \leq const \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \leq const.$$

Für $0 < x \leq 1$ ist $x^{s-1} \exp(-x) \leq x^{s-1}$ und

$$\int_a^1 x^{s-1} \exp(-x) dx \leq \int_a^1 x^{s-1} dx < \frac{1}{s}$$

d.h. insgesamt

$$\int_a^b x^{s-1} \exp(-x) dx \leq const + \frac{1}{s}.$$

Partielle Integration:

$$\int_a^b x^s \exp(-x) dx = -x^s \exp(-x)\Big|_a^b + s \int_a^b x^{s-1} \exp(-x) dx$$

In den Grenzen $a = 0$ bzw. $b = \infty$ verschwindet der erste Term der rechten Seite.
Die Substitution $x = y^2$ liefert für $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$

$$\int_a^b x^{s-1} \exp(-x) dx = 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} y^{2s-1} \exp(-y^2) dy, \text{ also}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty \exp(-y^2) dy = \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) dy.$$

$$0 \leq t \mapsto F(t) := \left(\int_0^t \exp(-x^2) dx\right)^2 + \int_0^1 \frac{\exp(-t^2(x^2+1))}{x^2+1} dx$$

ist differenzierbar und

$$DF(t) = 2 \exp(-t^2) \cdot \left[\int_0^t \exp(-x^2) dx - \int_0^1 t \exp(-t^2 x^2) dx\right]$$

Die Substitution $y = tx$ im zweiten Integral liefert

$DF = 0$, d.h. $F = const.$

$F(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
$\quad = \lim_{t\to\infty} F(t) = \left(\int_0^\infty \exp(-x^2) dx\right)^2$

$\square$