5.2 Periodische Funktionen

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Definition 5.2.0.

λ Periode von f $:\Longleftrightarrow f(t+\lambda) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Ex: $t \mapsto \exp 2\pi i t$ hat genau die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als Perioden.

Bemerkung 5.2.1.

Die Menge Λ_f der Perioden von f ist eine abelsche Gruppe bzgl. $+$, die alle ihre Häufungspunkte enthält, falls f stetig ist.

Lemma 5.2.2.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, $f \neq const, \Lambda_f \neq 0$. Dann gibt es genau ein $L > 0$, so dass

$$\Lambda_f = L \cdot \mathbb{Z}.$$

Beweis :
$\Lambda_f \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$. Daher existiert $L := \inf\left\{\lambda \in \Lambda_f \middle| \lambda > 0\right\}$. $L \in \Lambda_f \cap \overline{\mathbb{R}}_+$.
Ist $L = 0$, so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Folge λ_n von Perioden, so dass $0 < x - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k < \frac{1}{n}$, d.h. $x \in \Lambda_f$ und damit $f = const$.
Sei nun $L > 0$. Wähle zu $\lambda \in \Lambda_f \cap \mathbb{R}_+$ ein $n \in \mathbb{N}$ maximal mit $\lambda - nL \geq 0$. Dann ist $0 \leq \lambda - nL < L$. Da $\lambda - nL \in \Lambda_f$, ist $\lambda = nL$. $\square$

Definition 5.2.3.

$\Lambda \subset \mathbb{R}$ abelsche Gruppe bzgl. $+$. $\quad \mathcal{F}^{\Lambda}(\mathbb{R}) := \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \middle| \Lambda \subset \Lambda_f\right\}$.

Bemerkung 5.2.4.

[1]
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{L\cdot\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{F}^{\mathbb{Z}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f & \longmapsto & f\circ L \end{array}$$
$(f\circ L)(t) := f(L\cdot t)$

[2] $f\in\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{C} \\ S^1 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$
$p(t) := \exp 2\pi i t,\ f(t) = \tilde{f}\circ p(t)$
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}^{S^1} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

Stetige Funktionen der Periode 1 lassen sich leicht in Hülle und Fülle konstruieren.

Lemma 5.2.5.

$(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ absolut summierbare Familie komplexer Zahlen, d.h. es gibt ein $C>0$, so dass

$$\sum_{n\in A}|c_n| \le C \text{ für alle endlichen Mengen } A\subset\mathbb{Z}.$$

Dann ist
$$t\mapsto f(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\cdot\exp(2\pi i n t)$$
eine stetige Funktion der Periode 1,
$$c_n = \int_0^1 f(t)\exp(-2\pi i n t)dt.$$
Insbesondere:
$$f \text{ reellwertig} \Longleftrightarrow \overline{c}_n = c_{-n} \text{ für alle } n\in\mathbb{Z}.$$

Beweis : $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ bijektiv. Die Reihe
$$\sum_{n\ge 0} c_{\varphi(n)}\exp(2\pi i\varphi(n)\cdot t)$$
konvergiert absolut und gleichmäßig. Daher ist der Grenzwert f unabhängig von φ und als Funktion in t stetig. Er stimmt mit dem Grenzwert der verallgemeinerten Partialsummen

$$s_n(t) := \sum_{-n\leq k\leq n} c_k \exp(2\pi ikt)$$

überein, d.h. $f = \| \|\text{-}\lim s_n$.

Wegen

$$\int_0^1 \exp(2\pi int)\cdot\exp(-2\pi imt)dt = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n \end{cases}$$

ist

$$c_n = \int_0^1 f(t)\exp(-2\pi int)dt.$$

□

Bemerkung 5.2.6.

[1] *Für die "**Charaktere**" $\chi_n(t) := \exp(2\pi int)$ hat man die sogenannte "**Orthogonalitätsrelation**"*

$$\hat{\chi}_n(m) := \int_0^1 \chi_n(t)\overline{\chi}_m(t)dt = \begin{cases} 0 & n\neq m \\ 1 & n=m \end{cases}$$

[2] *$f : [0,1]\to\mathbb{C}$, so dass $Re\, f$, $Im\, f \in R[0,1]$. Dann heißt*

$$\hat{f}(n) := \int_0^1 f(t)\overline{\chi}_n(t)dt$$

*der **n-te Fourierkoeffizient von f** und*

$$s(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\chi_n$$

*die **Fourierreihe von f**.*

Das Hauptproblem der Fourier-Analysis besteht darin, zu entscheiden, wann die Fourierreihe $s(f)$ die Funktion f darstellt.

Lemma 5.2.7. ***(Riemann[1]-Lebesgue[2])***

$$\hat{f}(n)\to 0 \quad \text{für } |n|\to\infty.$$

[1] Bernhard Riemann (1826 - 1866), deutscher Mathematiker
[2] Henri Lebesgue (1875 - 1941), französischer Mathematiker

Beweis :
$\varepsilon > 0$, T Treppenfunktion, so dass $\|f - T\| < \varepsilon$ auf $[0,1]$.

$|\hat{f}(n)| \leq |\hat{T}(n)| + |\hat{T}(n) - \hat{f}(n)| \leq |\hat{T}(n)| + \varepsilon.$

$0 = t_1 < \cdots < t_m = 1$, so dass $T\big|_{(t_k,t_{k+1})} = \alpha_k = const.$ Für $n \neq 0$ ist dann

$$|\hat{T}(n)| = \left|\sum \alpha_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{\chi}_n(t)dt\right| = \left|\sum \alpha_k \frac{-1}{2\pi i n}\overline{\chi}_n\Big|_{t_k}^{t_{k+1}}\right| \leq m \cdot \frac{\|T\|}{\pi} \cdot \frac{1}{|n|}.$$

□

Im folgenden sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1-periodisch, so dass $Re\, f\big|_{[0,1]}$ und $Im\, f\big|_{[0,1]}$ Regelfunktionen sind. Wegen der Periodizität ist dies gleichbedeutend damit, daß $Re\, f$ und $Im\, f$ lokale Regelfunktionen sind. Insbesondere existiert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f^\sharp(x) := \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$$

und in den Stetigkeitspunkten von f ist

$$f^\sharp(x) = f(x).$$

Aus der Konvergenz der Partialsummen

$$s_n(t) = \sum_{-n \leq k \leq n} \hat{f}(k)\chi_k$$

der Fourierreihe von f folgt nach dem Cauchy'schen Grenzwertsatz die Konvergenz der arithmetischen Mittel

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_n(f).$$

Die Umkehrung ist i.a. falsch: $s_n = (-1)^n, \sigma_n = \pm\frac{1}{n+1}$.

Theorem 5.2.8. ***(Fejér[3])***

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokale 1-periodische Regelfunktion. Dann gilt

(1) $\sigma_n(f) \underset{ptw}{\longrightarrow} f^\sharp$

(2) $\|\sigma_n(f)\| \leq \|f\|$.

*Zusatz: Ist f stetig, so konvergieren die **Cesaro[4]-Mittel** $\sigma_n(f)$ sogar gleichmäßig gegen f.*

[3] Leopold Fejér (1880 - 1959), ungarischer Mathematiker
[4] Ernesto Cesàro (1859 - 1906), italienischer Mathematiker

Beweis : Da f und χ_k 1-periodisch, ist

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi}_k(t)f(t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\overline{\chi}_k(t)dt$$

und damit

$$s_n(f)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{-n\leq k\leq n} \chi_k(x-t)f(t)dt.$$

Aufgrund der Symmetrie der Summation liefert die Substitution $-y = x - t$

$$s_n(f)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{-n\leq k\leq n} \chi_k(y)f(x+y)dy.$$

Der Dirichlet[5]-Kern

$$D_n(y) := \sum_{-n\leq k\leq n} \chi_k(y) = 2Re\sum_{k=0}^{n} \chi_k(y) - 1$$

ist für $y \notin \mathbb{Z}$ nach geometrischer Summation

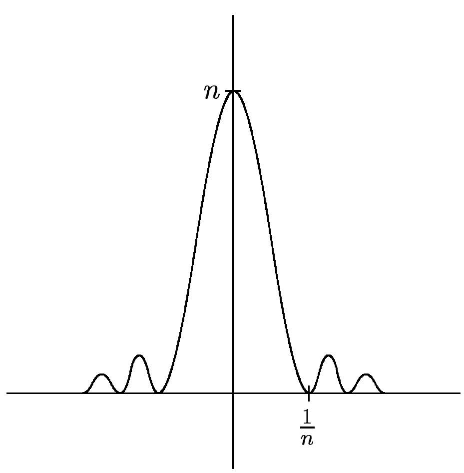
$$D_n(y) = \frac{\cos(2\pi ny) - \cos(2\pi(n+1)y)}{1-\cos(2\pi y)}.$$

Für $y \in \mathbb{Z}$ ist der Dirichlet-Kern nach l'Hôpital stetig ergänzbar. Für die Cesaro-Mittel folgt

$$\begin{aligned}\sigma_{n-1}(f)(x) &= \frac{1}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos 2\pi ny}{1-\cos 2\pi y}\cdot f(x+y)dy \\ &= \frac{1}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos 2\pi ny}{1-\cos 2\pi y}\cdot f(x-y)dy.\end{aligned}$$

$$K_n(y) := \frac{1}{n}\cdot\frac{1-\cos 2\pi ny}{1-\cos 2\pi y} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{\sin \pi ny}{\sin \pi y}\right)^2$$

ist der sogenannte **Fejér-Kern**.



[5] P.G. Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), französischer Mathematiker

Für $f = 1$ ist $s_n(f) = \sigma_{n-1}(f) = 1$, d.h.

$$1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K_n(y)dy$$

also

$$f^\sharp(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K_n(y) f^\sharp(x) dy.$$

Deshalb ist

$$\sigma_{n-1}(f)(x) - f^\sharp(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K_n(y) \cdot \frac{1}{2}\big(f(x+y) + f(x-y) - f(x+) - f(x-)\big)dy$$

Die Funktion

$$g(y) := \frac{1}{2}\big(f(x+y) + f(x-y) - f(x+) - f(x-)\big)$$

ist in $y = 0$ stetig, $g(0) = 0$.
Deshalb gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\frac{1}{2} > \delta > 0$, $\delta = \delta(x, \varepsilon)$, so dass $|g(y)| < \varepsilon$ für alle $|y| < \delta$. Wegen $\left\| K_n\big|_{[\delta,\frac{1}{2}]} \right\| \leq \frac{1}{n}\sin^{-2}(\delta\pi)$ konvergiert K_n auf den Intervallen $[\delta, \frac{1}{2}]$ bzw. $[-\frac{1}{2}, \delta]$ gleichmäßig gegen 0, und wegen $|g(y)| \leq 2\|f\|$ ist

$$\left|\sigma_{n-1}(f)(x) - f^\sharp(x)\right| \leq \int_{-\delta}^{\delta} K_n(y)|g(y)|dy + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \ldots + \int_{-\frac{1}{2}}^{\delta} \ldots \leq \varepsilon + \frac{2}{n} \cdot \|f\| \cdot \sin^{-2}\pi\delta,$$

d.h. $\sigma_n(f) \to f^\sharp$ punktweise.

$$|\sigma_{n-1}(f)(x)| = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K_n(y) f(x+y)dy \right| \leq \|f\| \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K_n(y)dy = \|f\|,$$

also $\|\sigma_{n-1}(f)\| \leq \|f\|$.

Ist f stetig, so ist f wegen der Periodizität sogar gleichmäßig stetig und

$$|g(y)| \leq \frac{1}{2}\big|f(x+y) - f(x)\big| + \frac{1}{2}\big|f(x-y) - f(x)\big| < \varepsilon$$

für alle $|y| < \delta$ unabhängig von x, also

$$\sigma_n(f) \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f = f^\sharp.$$

$\square$

Folgerung 5.2.9.

äq

(i) $\hat{f} = \hat{g}$

(ii) $f = g$ *bis auf eine abzählbare Menge.*

HS $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion

äq

(i) $\varphi = 0$ bis auf die Unstetigkeitsstellen

(ii) $\varphi = 0$ bis auf höchstens abzählbar viele Stellen

(iii) $\int_a^b |\varphi(t)| dt = 0$.

Beweis des HS:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Eine Regelfunktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $|\varphi|$ besitzt eine konstante Stammfunktion nach dem allgemeinen MWS.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\overline{x}$ Stetigkeitsstelle, $|\varphi(\overline{x})| > 0$. Dann gibt es ein Intervall $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $\alpha < \beta$, so dass $|\varphi(x)| \geq \frac{1}{2}|\varphi(\overline{x})|$ für alle $x \in [\alpha,\beta]$, d.h.

$$0 = \int_a^b |\varphi(t)| dt \geq \frac{1}{2}|\varphi(\overline{x})|(\beta - \alpha) > 0$$

$\square$

Beweis der Folgerung:

(ii) $\Rightarrow$ (i): $|\hat{f}(n) - \hat{g}(n)| = |\int_0^1 (f(t) - g(t))\, \overline{\chi}_n(t) dt| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt = 0$

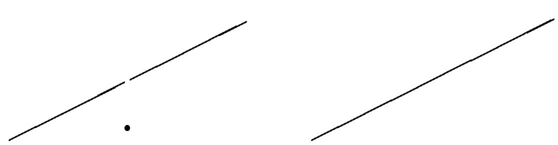
(i) $\Rightarrow$ (ii): $\sigma_n(f) = \sigma_n(g) \Longrightarrow f^\sharp = g^\sharp$. $\square$

Folgerung 5.2.10.

Ist $(\hat{f}(n))$ absolut summierbar, so konvergieren die Partialsummen $s_n(f)$ der Fourierreihe gleichmäßig gegen $f^\sharp$. Insbesondere ist $f^\sharp$ stetig.

Beachte: Ist f selbst stetig, so ist $f = f^\sharp$ und $s_n(f) \xrightarrow[\|\,\|]{} f$.

WARNUNG: $f^\sharp$ stetig $\underset{i.a.}{\not\Rightarrow}$ f stetig. Wohl aber gilt: $f^\sharp$ stetig $\Rightarrow$ f stetig ergänzbar.



f unstetig $\qquad$ $f^\sharp$ stetig

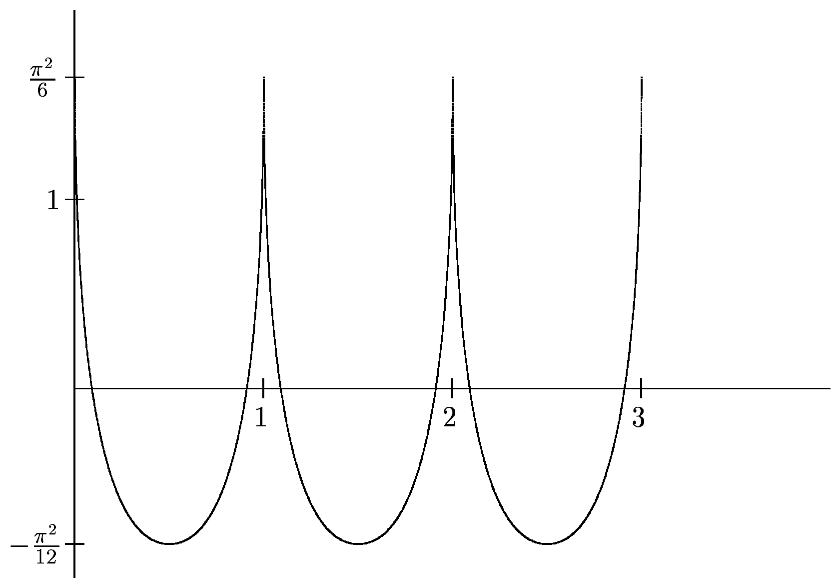
Beweis der Folgerung: Die Funktion $t \mapsto g(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\chi_n(t)$ ist stetig, $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ und $s_n(g) = s_n(f) \xrightarrow[\|\,\|]{} g$ nach 5.2.5.

Andererseits ist $\sigma_n(g) = \sigma_n(f)$ und daher wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts nach Fejér $f^\sharp = g = \lim \sigma_n(g)$. Insbesondere konvergiert also $s_n(f)$ gleichmäßig gegen $f^\sharp$. Daher ist $f^\sharp$ stetig. $\square$

Ex:
$$f(x) := \left(\frac{2\pi x - \pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}, \quad 0 \le x \le 1.$$

f stetig, $f(0) = f(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

Durch $f(x+1) := f(x)$ wird f stetig und 1-periodisch nach ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt:



2-malige partielle Integration:

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{2n^2} & n \neq 0 \end{cases}$$

Die Familie der Fourier-Koeffizienten ist also absolut summierbar, folglich $s_n(f) \underset{\|\,\|}{\longrightarrow} f$, d.h.

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\chi_n = \sum_{n>0} \frac{1}{2n^2}(\chi_n + \chi_{-n})$$

Daher ist

$$f(x) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^2} \cos 2\pi n x,$$

insbesondere

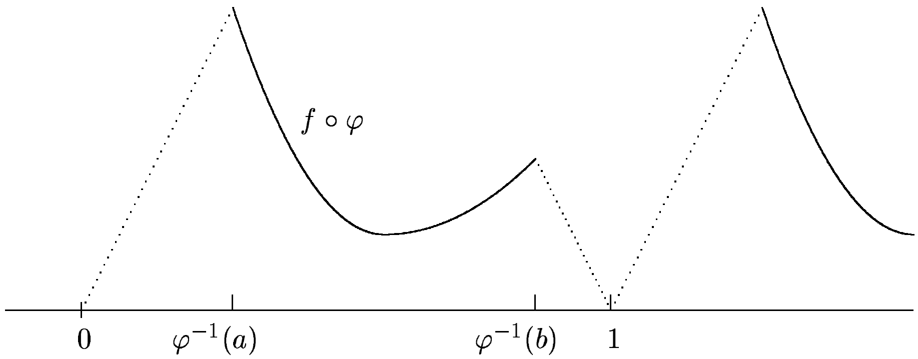
$$\frac{\pi^2}{6} = f(0) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).$$

Theorem 5.2.11. ***(Approximationssatz von Weierstraß)***

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist der gleichmäßige Limes einer Folge p_n von Polynomen mit reellen Koeffizienten.

Beweis :

Wähle affine Abbildung $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, so dass $\varphi^{-1}[a,b] \subset (0,1)$.
Setze $f \circ \varphi$ stetig und 1-periodisch fort:



$\sigma_n(f \circ \varphi) \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f \circ \varphi$. Auf $[a,b]$ ist daher f der gleichmäßige Limes der komplexen Potenzreihen $\sigma_n(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$.
Die Realteile der Partialsummen $\sum_{nm}$ dieser Potenzreihen konvergieren dann auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f:

$$\begin{aligned}\left\| f - Re \sum\nolimits_{nm} \right\| &= \left\| Re \left(f - \sum\nolimits_{nm} \right) \right\| \leq \left\| f - \sum\nolimits_{nm} \right\| \\ &\leq \left\| f - \sigma_n(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \right\| + \left\| \sigma_n(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} - \sum\nolimits_{nm} \right\|\end{aligned}$$

□

Definition 5.2.12.

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$.

f von beschränkter Variation $:\Longleftrightarrow$

$$V_a^b f := \sup\{\sum |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \,\big|\, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,\ n \in \mathbb{N}_+\} < \infty$$

Ex:

[1] Jede monotone Funktion f ist von beschränkter Variation, da $V_a^b f = |f(b) - f(a)|$, ebenso wie jede stetig differenzierbare Funktion g, da $V_a^b g \leq \|g'\|(b-a)$.

[2] $x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ ist stetig, aber nicht von beschränkter Variation.

Lemma 5.2.13.

$a < c < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation.
Dann ist

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$$

Insbesondere ist $t \mapsto V_a^t f$ monoton steigend.

Satz 5.2.14.

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

äq

(i) f *von beschränkter Variation*

(ii) f *ist Differenz zweier monotoner Funktionen*

Insbesondere ist also eine Funktion von beschränkter Variation stets eine Regelfunktion.

Beweis : $f(t) = V_a^t f - \left(V_a^t f - f(t)\right)$ □

Theorem 5.2.15. (Dirichlet-Jordan[6])

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *1-periodisch,* $f\big|_{[0,1]}$ *von beschränkter Variation.*
Dann gilt

(1) $s_n(f) \longrightarrow f^\sharp$ *punktweise*

(2) $\|s_n(f)\|$ *beschränkt*

Folgerung 5.2.16.
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig, 1-periodisch,* $f\big|_{[0,1]}$ *von beschränkter Variation.*
Dann konvergiert die Fourierreihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\chi_n$$

gleichmäßig gegen f.

[HS] 1:

$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation.

Dann gibt es ein $C \geq 0$, so dass $|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|}, \quad n \neq 0.$

[6]Camille Jorda (1838 - 1922), französischer Mathematiker

Beweis des HS:
Œ $f \nearrow$. Wir schätzen exemplarisch

$$-Im\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\sin 2\pi nt\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\sin 2\pi nt\,dt$$

ab. Ist $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k}{n}+\frac{1}{2n}]$, so ist

$$f\left(\frac{k}{n}\right)\sin 2\pi nt \le f(t)\sin 2\pi nt \le f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\sin 2\pi nt,$$

ist dagegen $t \in [\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}, \frac{k+1}{n}]$, so ist

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)\sin 2\pi nt \le f(t)\sin 2\pi nt \le f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\sin 2\pi nt,$$

also

$$0 \ge \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ldots \ge \frac{1}{\pi n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right).$$

Teleskop-Summation: $0 \ge -Im\,\hat{f}(n) \ge \frac{1}{\pi n}(f(0)-f(1))$. □

[HS] 2: (Hardy[7]-Littlewood[8])

$(V, \|\ \|)$ normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$,

(x_n) Folge in V, $s \in V$, $c \ge 0$, so dass

$$\|x_n\| \le \frac{c}{n} \text{ für fast alle n.}$$

äq

(i) $s_n := x_0 + \cdots + x_n \longrightarrow s$ bzgl. $\|\ \|$

(ii) $\sigma_n := \frac{1}{n+1}(s_0 + \cdots + s_n) \longrightarrow s$ bzgl. $\|\ \|$

Zusatz: Mit (σ_n) ist auch (s_n) beschränkt bzgl. $\|\ \|$.

Beweis :

(i) $\Rightarrow$ (ii): A I Üb (Cauchy'scher Grenzwertsatz)

(ii) $\Rightarrow$ (i): $m \ge n+1$

$$\begin{aligned}(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n &= s_m + s_{m-1} + \ldots + s_{n+1}\\ &= s_m\\ &\quad +s_n - x_m\\ &\quad\ \vdots\\ &\quad +s_m - x_m - \cdots - x_{n+2}\end{aligned}$$

[7]Godefrey Harold Hardy (1877 - 1947), englischer Mathematiker
[8]John Edensor Littlewood (1885 - 1977), englischer Mathematiker

also $\qquad s_m = \sigma_m + \frac{n+1}{m-n}(\sigma_m - \sigma_n) + \frac{1}{m-n}\left((m-n-1)x_m + \ldots + x_{n+2}\right).$

Hieraus folgt:

$$\|s_m\| \leq \|\sigma_m\| + \frac{n+1}{m-n}\|\sigma_m - \sigma_n\| + \frac{c}{2} \cdot \frac{m-n}{n+1}$$

bzw.

$$\|s_m - s\| \leq \|\sigma_m - s\| + \frac{n+1}{m-n}\|\sigma_m - \sigma_n\| + \frac{c}{2} \cdot \frac{m-n}{n+1}.$$

Zu $1 > \varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|\sigma_m - \sigma_n\|, \|\sigma_m - s\| < \frac{c}{2} \cdot \varepsilon$$

für alle $m > n \geq \mathbb{N}$. Dann ist der 'kritische' Term

$$\frac{n+1}{m-n}\|\sigma_m - \sigma_n\| + \frac{c}{2} \cdot \frac{m-n}{n+1} \leq \frac{c}{2}\left(\varepsilon\,\frac{n+1}{m-n} + \frac{m-n}{n+1}\right).$$

Für $m+1 > \max\left\{\frac{6}{\sqrt{\varepsilon}},\, N\left(1 + 2\sqrt{\varepsilon}\right)\right\} + 1$ ist

(1) $\qquad m > N$

(2) $\qquad \frac{m+1}{1+\sqrt{\varepsilon}} > \frac{m+1}{1+2\sqrt{\varepsilon}} + 1 > N + 1$

Daher gibt es eine natürliche Zahl n, so dass

$$N < \frac{m+1}{1+2\sqrt{\varepsilon}} < n+1 < \frac{m+1}{1+\sqrt{\varepsilon}} < m+1,$$

Dann ist aber $\sqrt{\varepsilon} < \frac{m-n}{n+1} = \frac{m+1}{n+1} - 1 < 2\sqrt{\varepsilon}$, also

$$\frac{c}{2}\left(\varepsilon\,\frac{n+1}{m-n} + \frac{m-n}{n+1}\right) \leq \frac{c}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} + 2\sqrt{\varepsilon}\right) = \frac{3}{2}\,c \cdot \sqrt{\varepsilon}.$$

□

Beweis des Theorems von Dirichlet-Jordan mittels der beiden Hilfssätze:

(1) $x \in \mathbb{R}$ fest.
$V := \mathbb{C}$, $\|\ \| := |\ |$, $x_n := \hat{f}(n)\chi_n(x) + \hat{f}(-n)\chi_{-n}(x)$,
$|x_n| \leq \frac{2c}{|n|}$, da f von beschränkter Variation.
$s_n(f)(x) = x_0 + \cdots + x_n = \sum_{-n \leq k \leq n} \hat{f}(k)\chi_n(x)$.
Nach dem Theorem von Fejér konvergiert

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\left(s_n(f)(x) + \cdots + s_0(f)(x)\right) \longrightarrow f^\sharp(x) \text{ bzgl. } |\ |,$$

also $s_n(f)(x) \longrightarrow f^\sharp(x)$ bzgl. $|\ |$.

(2) $V := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f$ 1-periodisch, $f\big|_{[0,1]}$ Regelfunktion$\}$
$\|f\| := \sup\{|f(t)|\big|t \in \mathbb{R}\}$
$x_n := \hat{f}(n)\chi_n + \hat{f}(n)\chi_{-n}$. Da $|\chi_n| = 1$, ist $\|x_n\| \le \frac{2c}{|n|}$. Nach Fejér ist $\|\sigma_n(f)\| \le \|f\|$. Deshalb ist auch $\|s_n(f)\|$ beschränkt.

(3) Ist $f \in V$ stetig, gilt nach Fejér $\sigma_n(f) \longrightarrow f = f^\sharp$ bzgl. $\|\ \|$, also $s_n(f) \longrightarrow f$ bzgl. $\|\ \|$.

□

Ex: $a \notin \mathbb{Z}, \quad f(t) := \exp 2\pi i a t, \quad -\frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}$.
Setze f periodisch fort durch $f(t \pm 1) := f(t)$.
f stetig in allen Punkten $\ne \frac{2k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$,

$$f^\sharp\left(\frac{2k+1}{2}\right) = f^\sharp\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}+\right) + f\left(\frac{1}{2}-\right)\right) = \frac{e^{-\pi i a} + e^{\pi i a}}{2} = \cos \pi a$$

Da $t \mapsto \exp 2\pi i a t$ stetig differenzierbar ist, ist f von beschränkter Variation auf $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Die Fourierkoeffizienten berechnet man geschickterweise über $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$\hat{f}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp 2\pi i(a-n)x dx = \frac{(-1)^n}{\pi(a-n)} \cdot \sin \pi a.$$

Man sieht, dass sie wie $\frac{1}{|n|}$ wachsen. Nach Dirichlet-Jordan ist

$$f^\sharp(x) = \frac{\sin \pi a}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{n\ge1}(-1)^n\left(\frac{e^{2\pi i n x}}{a-n} + \frac{e^{-2\pi i n x}}{a+n}\right)\right)$$

$x = 0$: $\quad \frac{\pi}{\sin \pi a} = \frac{1}{a} + \sum_{n\ge1}(-1)^n\left(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right)$
$x = \frac{1}{2}$: $\quad \pi \operatorname{cotan} \pi a = \frac{1}{a} + \sum_{n\ge1}\left(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right)$.

Beachte, dass in der 'Partialbruchzerlegung' des cotan die Reihen $\sum_{n\ge1}\frac{1}{1\pm n}$ nicht konvergieren.
Für $|a| < 1$ ist

$$\pi a \operatorname{cotan} \pi a = 1 - \sum_{n\ge1}\frac{2a^2}{n^2} \cdot \sum_{k\ge0}\left(\frac{a}{n}\right)^{2k}.$$

Nach dem 'Großen Umordnungssatz' (vergl. A III) kann man die Summation vertauschen, da absolute Konvergenz vorliegt, also

$$\pi a \cot \pi a = 1 - 2\sum_{k\ge1}\zeta(2k) \cdot a^{2k}.$$

Definiert man die *Bernoulli*[9]'schen Zahlen B_n durch

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} y^n,$$

so hat man die Rekursionsformel

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0,$$

was man zur symbolischen Formel $(1+B)^n - B^n = 0$ zusammenfasst.

Wegen

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \text{ und} \\ \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \end{aligned}$$

ist

$$\pi a \operatorname{cotan} \pi a = \pi i a + \frac{2\pi i a}{e^{2\pi i a} - 1}$$

und mit $y = 2\pi i a$ folgt

$$\sum_{n \geq 1} \frac{B_n}{n!} y^n = 1 - \frac{y}{2} - 2 \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} \cdot y^{2n}$$

oder

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \cdot B_{2n}$$

Insbesondere:

(1) $B_n = 0$ für $n \equiv 1(2)$, $n > 1$

(2) $B_0 = 0, \;\; B_1 = -\frac{1}{2}$

Beispielsweise ist $B_2 = \frac{1}{6}$ und daher erneut

$$\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

[9]Jakob I. Bernoulli (1654 - 1705), Baseler Mathematikprofessor, ältester Sproß einer belgischen Hugenottenfamilie, die bis zur Mitte des 19. Jh. 10 Mathematiker und Astronomen hervorbrachte.

Eine positiv-semidefinite hermite'sche Form $(u,v) \mapsto (u|v)$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V induziert wegen der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung (vgl. LA)

$$|(u|v)| \le \|u\|_2 \cdot \|v\|_2, \quad \|u\|_2 := \sqrt{(u|u)}$$

eine 'Halbnorm' $\| \ \|_2$ auf V, d.h. eine Abbildung

$$\| \ \|_2 : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+,$$

so dass

N1: $\|u\|_2 \ge 0$
N2: $\|\lambda u\|_2 = |\lambda| \cdot \|u\|_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}$
N3: $\|u+v\|_2 \le \|u\|_2 + \|v\|_2$.

Ist dann (u_n) eine Folge in V, $u \in V$, so konvergiert u_n gegen u bezüglich $\| \ \|_2$ per definitionem genau dann, wenn $\|u_n - u\|_2 \to 0$. Der Grenzwert u ist allerdings nur dann 1-deutig, wenn $(\ | \ )$ positiv-definit ist.

Der Vektorraum

$$V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \big| f \text{ 1-periodisch}, f|_{[0,1]} \text{ Regelfunktion}\}$$

trägt auf natürliche Weise die positiv-semidefinite hermite'sche Form

$$(f,g) \mapsto (f|g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

mit der zugehörigen Halbnorm

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\|f\|_2 = 0$ genau dann, wenn f in den Stetigkeitsstellen verschwindet.
Für die Fourierkoeffizienten ist dann

$$\hat{f}(n) = (f|\chi_n)$$

und wegen

$$(\chi_n|\chi_m) = \delta_{nm}$$

bilden die Charaktere χ_n ein Orthonormalsystem in V.

Beachte: $\|f\|_2 = \|f^\sharp\|_2 \le \|f\|$.

Satz 5.2.17.

$A \subset \mathbb{Z}$ endlich, $S = \sum_{n \in A} c_n \chi_n$, $f \in V$.

äq

(i) $\|f - s\|_2$ *minimal*

(ii) $c_n = \hat{f}(n)$.

Beweis :

$$\|f-s\|_2^2 = \Big\|f - \sum_{n\in A}\hat f(n)\chi_n + \sum_{n\in A}\big(\hat f(n)-c_n\big)\chi_n\Big\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n\in A}|\hat f(n)|^2 + \sum_{n\in A}|\hat f(n)-c_n|^2$$

□

Folgerung 5.2.18. ***Bessel'sche*[10] *Ungleichung***

$$\|f\|_2^2 \geq \sum_{n\in A}|\hat f(n)|^2.$$

Theorem 5.2.19.

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ 1-periodisch, $f\big|_{[a,b]}$ Regelfunktion.
Dann gilt:

(1) $s_n(f) \underset{\|\ \|_2}{\longrightarrow} f$

(2) $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat f(n)|^2$.

Beweis : Wegen

$$\|f-s_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{-n\leq k\leq n}|\hat f(n)|^2$$

sind beide Aussagen äquivalent.
Ist $T\in T[0,1]$, $T(0)=T(1)$, so lässt sich T zu einer 1-periodischen Funktion fortsetzen, und wegen der Minimalitätseigenschaft ist

$$\begin{aligned}
\|f-s_n(f)\|_2 &\leq \|(f-T)-s_n(f-T)\|_2 + \|T-s_n(T)\|_2\\
&\leq \|f-T\|_2 + \|T-s_n(T)\|_2\\
&\leq \|f-T\| + \|T-s_n(T)\|_2.
\end{aligned}$$

Daher genügt es, $T \underset{\|\ \|_2}{\longrightarrow} s_n(T)$ zu zeigen.
Bis auf eine Funktion, die höchstens an endlich vielen Stellen $\neq 0$ ist, ist T eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen $\chi_{[a,b]}$ eines Intervalles $[a,b]\subset[0,1]$, also

$$\|T-s_n(T)\|_2 \leq \|T\|\cdot\sum_{endl.}\|\chi_{[a,b]}-s_n(\chi_{[a,b]})\|_2.$$

Wegen $\|\chi_{[a,b]}\|_2^2 = (b-a)$ und

$$\hat\chi_{[a,b]}(n) = \int_a^b \exp(-2\pi int)dt = \begin{cases} b-a & n=0\\ -\frac{1}{2\pi in}\exp(-2\pi int)\big|_a^b & n\neq 0\end{cases}$$

[10] Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846), deutscher Astronom

ist

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\chi}(n)|^2 &= (b-a)^2 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1-\cos 2\pi n(b-a)}{n^2} \\ &= (b-a)^2 + \frac{1}{\pi^2}\,\zeta(2) - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos 2\pi n(b-a)}{n^2} \\ &= (b-a),\end{aligned}$$

da für $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos 2\pi n\, x}{n^2} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}$$

und $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. $\square$