# Kapitel 6

# Metrische Räume

## 6.0 Topologie metrischer Räume

**Definition 6.0.0.**

*$\emptyset \neq X$ Menge, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

*$d$ **Metrik** auf $X$* $:\Longleftrightarrow$

M1: $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
M2: $d(x,y) = d(y,x)$
M3: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

*Unter einem **metrischen Raum** $(X,d)$ versteht man eine Menge $X$ zusammen mit einer Metrik $d$ auf $X$; man hat stets die 'verschärfte' 3-Ecks-Ungleichung:*

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y).$$

**Ex:**

[1] Jede Menge $\emptyset \neq X$ ist trivialerweise ein metrischer Raum durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

[2] $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind metrische Räume bzgl.

$$d(x,y) := |x - y|$$

[3] $\emptyset \neq Y$, $B(Y) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ beschränkt}\}$. $B(Y)$ ist metrischer Raum bzgl.

$$d(f,g) := \|f - g\|_\infty := \sup_{t \in Y} |f(t) - g(t)|.$$

[4] $C \subset \mathbb{F}_2^n$ linearer Code der Länge $n$, $x \in C$ Codewort.

$w(x) := \#\{i \mid x_i \neq 0\}$ ist das sogenannte Gewicht von $x$; in gewissem Sinne misst es den Informationsgehalt von $x$.

$$d(x,y) := w(x-y)$$

ist die sogenannte Hamming-Metrik des Codes.
Sie spielt hinsichtlich der 'fehler-korrigierenden' Eigenschaften des Codes eine wichtige Rolle.

Die gebräuchlichsten Metriken werden von einer Norm induziert.

**Definition 6.0.1.**

*$V$ Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.*

$\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ ***Norm*** *auf $V$* $:\iff$

N1: $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \iff x = 0$

N2: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *für alle* $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\lambda \in \mathbb{C}$

N3: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

*Unter einem* ***normierten Raum*** $(V, \|\ \|)$ *versteht man einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zusammen mit einer Norm.*

**Lemma 6.0.2.**

*Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\ \|)$ ist auf natürliche Weise ein metrischer Raum:*

$$d(x,y) := \|x-y\|.$$

*Die Metrik ist translationsinvariant, d.h.* $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

**Ex:**

[1] $V = \mathbb{R}^n$.

$$\|x\|_1 := \sum_i |x_i|$$

$$\|x\|_2 := \left(\sum_i x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty := \sup_i |x_i|$$

Die 2-Norm $\|\ \|_2$ ist von dem Skalarprodukt

$$(x,y) \mapsto (x|y) := \sum x_i y_i$$

des $\mathbb{R}^n$ induziert; die assoziierte Metrik $d_2$ ist der gewöhnliche euklidische Abstand im $\mathbb{R}^n$.

[2] $V := C[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$.

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt$$
$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

Auch hier ist die 2-Norm $\| \ \|$ von einem Skalarprodukt auf $C[0,1]$ induziert, nämlich

$$(f,g) \mapsto (f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

**Definition 6.0.3.**

*$(X,d)$ metrischer Raum, $x_n$, $x_* \in X$.*

*Die Folge $(x_n)$ konvergiert gegen $x_*$ bzgl. $d :\Longleftrightarrow d(x_n, x_*)$ ist eine Nullfolge.*

*Konvergiert $(x_n)$ gegen $x_*$ bzgl. $d$, so schreibt man dafür auch*

$$x_n \underset{d}{\longrightarrow} x_* \ \text{ oder } x_* = d\text{-}\lim x_n.$$

**Lemma 6.0.4.**

*Eine Folge eines metrischen Raumes hat höchstens einen Grenzwert.*

*Beweis :*
Sind $x_*$ und $x_*'$ zwei Grenzwerte der Folge $x_n$, so ist

$$d(x_*, x_*') \le d(x_*, x_n) + d(x_n, x_*') \longrightarrow 0.$$

Nach M1 gilt dann $x_* = x_*'$. □

**Ex:** Die Folge

$$f_n \in C[0,1], \quad f_n(t) := t^n,$$

konvergiert gegen die 0-Funktion bzgl. $d_1$ und $d_2$; bzgl. $d_\infty$ konvergiert $(f_n)$ nicht.

Wegen

$$0 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le N \cdot \|x\|_\infty$$
$$0 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{N} \cdot \|x\|_\infty$$

hängt im $\mathbb{R}^N$ die Konvergenz nicht von der Norm ab:

**Theorem 6.0.5.**

$x_n \in \mathbb{R}^N, \quad x_* \in \mathbb{R}^N.$

*äq*

(i) $x_n \longrightarrow x_*$ *bzgl.* $d_1$

(ii) $x_n \longrightarrow x_*$ *bzgl.* $d_2$

(iii) $x_n \longrightarrow x_*$ *bzgl.* $d_\infty$.

**PROBLEM:** Wann liefern zwei Metriken denselben Konvergenzbegriff auf $X$ ?

**Definition 6.0.6.**

$\overline{x} \in X, \quad A, B, U \subset X.$

*(1) $U$ Umgebung von $\overline{x}$ $:\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass die 'Kugel'*

$$B_\varepsilon(\overline{x}) := \{y \in X \big| d(\overline{x}, y) < \varepsilon\}$$

*ganz in $U$ liegt.*

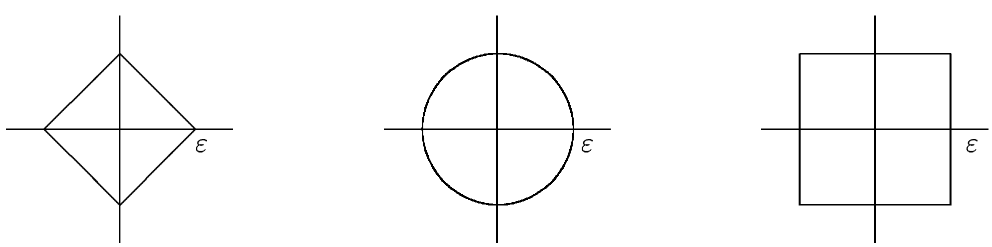
*(2) $A$ offen $:\Longleftrightarrow$ $A$ ist Umgebung aller seiner Punkte*

*(3) $B$ abgeschlossen $:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ offen.*

**Ex:**

[1] Für $\varepsilon > 0$ ist die $\varepsilon$-Kugel $B_\varepsilon(\overline{x})$ stets offen:
$y \in B_\varepsilon(\overline{x})$, $\eta := \frac{1}{2}\left(\varepsilon - d(\overline{x}, y)\right) > 0$, $\;y \in B_\eta(y) \subset B_\varepsilon(\overline{x})$.

[2] Im $\mathbb{R}^N$ sehen die $\varepsilon$-Kugeln folgendermaßen aus:




$d_1$ $\quad$ $d_2$ $\quad$ $d_\infty$

[3] Bzgl. der 'diskreten' Metrik auf $X$

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

ist jede Teilmenge von $X$ offen, denn

$$B_\varepsilon(\overline{x}) = \begin{cases} \{\overline{x}\} & 0 < \varepsilon < 1 \\ X & 1 \leq \varepsilon \end{cases}$$

**Satz 6.0.7.**

*$(X, d)$ metrischer Raum,*

$$T_d := \{U \subset X \big| U \text{ offen bzgl. } d\} \subset \mathcal{P}X.$$

*Dann ist $T_d$ eine Topologie auf $X$, d.h.*

T1: $\emptyset,\ X \in T_d$

T2: $U_1, \dots, U_k \in T_d \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^k U_i \in T_d$

T3: $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},\ U_\lambda \in T_d \Longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in T_d$.

**Lemma 6.0.8.**

$x_n,\ x_* \in X$

*äq*

(i) $x_n \longrightarrow x_*$

(ii) *In jeder Umgebung $U$ von $x_*$ liegen fast alle Folgenglieder $x_n$.*

**Folgerung 6.0.9.**

*$d, d'$ Metriken auf $X$, so dass $T_d = T_{d'}$.*
*Dann konvergiert eine Folge in $X$ bzgl. $d$ genau dann, wenn sie bzgl. $d'$ konvergiert.*

Insbesondere hängt der Konvergenzbegriff nur von der Topologie ab.

**Definition 6.0.10.**

*$X, Y$ metrische Räume, $f : X \longrightarrow Y$, $\overline{x} \in X$.*
*$f$ stetig in $\overline{x} :\Longleftrightarrow \quad f(x_n) \longrightarrow f(\overline{x})$ für alle $x_n \longrightarrow \overline{x}$, $x_n \in X$.*

*Eine stetige Abbildung von $X$ ist eine Abbildung, die in allen Punkten von $X$ stetig ist; $C(X, Y)$ ist die Menge der stetigen Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$; $C(X)$ ist die Menge der stetigen Funktionen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

**Satz 6.0.11.**

*$X, Y$ metrische Räume, $f : X \longrightarrow Y$.*

*äq*

(i) *$f$ stetig*

(ii) *$f(x_n) \to f(\overline{x})$ für alle $x_n, \overline{x} \in X$, $x_n \to \overline{x}$*

(iii) *Zu jedem $\overline{x} \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $d_Y(f(x), f(\overline{x})) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $d_X(x, \overline{x}) < \delta$*

(iv) *$f^{-1}(U)$ offen für alle offenen Mengen $U \subset Y$*

(v) *$f^{-1}(A)$ abgeschlossen für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset Y$.*

**Folgerung 6.0.12.**

*Das Kompositum $g \circ f$ zweier stetiger Abbildungen*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

*ist wieder stetig.*

*Beweis der Folgerung:* $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}U)$ und Satz 6.0.11, (iv). □

WARNUNG: Im allgemeinen ist das Bild $f(U)$ einer offenen Menge $U$ unter einer stetigen Abbildung nicht offen:
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x^2)$.
$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ offen, aber $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ nicht offen.

*Beweis des Satzes::*
(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Definition
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): vgl. AI
(iv) $\Leftrightarrow$ (v): $\mathcal{C}f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathcal{C}A), A = \mathcal{C}U$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv): $U \subset Y$ offen, $\overline{x} \in f^{-1}(U)$. Da $U$ offen, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(\overline{x})) \subset U$. Da $f$ stetig, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $fB_\delta(\overline{x}) \subset B_\varepsilon(f(\overline{x})) \subset U$, d.h. $\overline{x} \in B_\delta(\overline{x}) \subset f^{-1}(U)$. Damit ist $f^{-1}(U)$ offen.
(iv) $\Rightarrow$ (iii): $\overline{x} \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(\overline{x})))$ offen für alle $\varepsilon > 0$ und alle $\overline{x} \in X$, also existiert ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(\overline{x})) \subset B_\varepsilon(f(\overline{x}))$, d.h. $f$ stetig in $\overline{x}$.

□

**Bezeichnung:**
Ist $f : X \longrightarrow Y$ stetig und bijektiv, und ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ ebenfalls stetig, so heißt $f$ ein Homöomorphismus und $X$ homöomorph zu $Y$, in Zeichen $X \approx Y$.

Beispielsweise ist $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m \Longleftrightarrow n = m$ (schwer zu beweisen).

**Definition 6.0.13.**
*Topologische Begriffe: Inneres, Abschluss, Rand, Häufungspunkt, isolierter Punkt.*

*$X$ metrischer Raum, $A \subset Y$, $\overline{x} \in X$.*

(1) $$\begin{aligned} \mathring{A} &= \textit{Innere von } A \\ &= \textit{alle Punkte von } A\textit{, für die } A \textit{ Umgebung ist} \\ &= \textit{größte in } A \textit{ enthaltene offene Menge} \\ &= \textstyle\bigcup_{U \subset A,\, U \text{ offen}} U \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} \overline{A} &= \textit{Abschluss von } A \\ &= \textit{kleinste } A \textit{ umfassende abgeschlossene Menge} \\ &= \textit{alle Punkte von } X\textit{, deren Umgebungen } A \textit{ treffen} \\ &= \textstyle\bigcap_{A \subset B,\, B \text{ abgeschlossen}} B \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} \partial A &= \textit{Rand von } A \\ &= \textit{alle Punkte von } X\textit{, deren Umgebungen sowohl } A \textit{ als auch } \complement A \textit{ treffen} \\ &= \overline{A} \cap \overline{\complement A} \end{aligned}$$

(4) *$\overline{x}$ Häufungspunkt von $A :\Longleftrightarrow$ Es gibt eine Folge $a_n \in A, a_n \neq \overline{x}$ so dass $a_n \to \overline{x}$.*

(5) *$\overline{x} \in X$ isolierter Punkt $:\Longleftrightarrow \{\overline{x}\} \subset X$ offen.*

Man überlegt sich leicht:

- $\left(\mathring{A}\right)^{\circ} = \mathring{A}$
- $\left(\overline{A}\right)^{-} = \overline{A}$
- $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

**Ex:** Wegen $|x_i - y_i| \leq \|x - y\|_\infty \leq \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|$ konvergiert eine Folge $\left(x^{(n)}\right)_{n \geq 0}$ im $\mathbb{R}^N$ genau dann, wenn die $N$ Koordinatenfolgen $\left(x_i^{(n)}\right)_{n \geq 0}$, $i = 1, \ldots, N$, in $\mathbb{R}$ konvergieren. Insbesondere ist

$$\det : M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \longmapsto \det A$$

stetig und daher

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \mid \det A \neq 0\} = \overset{-1}{\det}\left(\mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$$

offen in $M_n(\mathbb{R})$. Die Komplementärmenge $M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}\{0\}$ der nicht-invertierbaren Matrizen ist somit abgeschlossen.

Ⓢ Zu jeder Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ und jedem $\varepsilon \geq 0$ gibt es eine Matrix $B \in GL_n(\mathbb{R})$, so dass $\|A - B\|_\infty < \varepsilon$.

*Beweis :* Da $A$ nur endlich viele Eigenwerte hat, gibt es ein $\varepsilon' > 0$. so dass jeder von Null verschiedene Eigenwert von $A$ dem Betrag nach größer als $\varepsilon'$ ist. Definiere $\lambda := \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon'}{2}\right\}$, $B := A - \lambda E_n$ ($E_n = n \times n$-Einheitsmatrix). Dann ist $\det B \neq 0$ und $\|B - A\|_\infty = \lambda < \varepsilon$. □

**Folgerung 1:** $M_n(\mathbb{R}) = \overline{(GL_n(\mathbb{R})}$.

Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ sei $\chi_A(t) := \det(A - tE_n)$ das charakteristische Polynom von $A$.

**Folgerung 2:** $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ für alle $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
Insbesondere: tr$(AB)$=$tr(BA)$.

*Beweis :* Für festes $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \chi_A(t)$ stetig. Für invertierbares B ist $B(AB)B^{-1} = BA$ und daher $\chi_{AB} = \chi_{B(AB)B^{-1}} = \chi_{BA}$.
Ist $B$ beliebig, wähle eine Folge $\big(B_k\big) \subset GL_n(\mathbb{R})$, so dass $B_k \to B$. Dann folgt $AB_k \to AB$ und $B_kA \to BA$, also für festes $t$ auch $\chi_{AB_k}(t) \to \chi_{AB}(t)$ und $\chi_{B_kA}(t) \to \chi_{BA}(t)$. Wegen $\chi_{AB_k}(t) = \chi_{B_kA}(t)$ und der Eindeutigkeit des Grenzwertes ist daher $\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

**Bemerkung 6.0.14.**

*$X$ metrischer Raum mit Metrik $d$, $\emptyset \neq A \subset X$.*
*$d$ induziert durch Einschränkung eine Metrik $d^A$ auf $A$, $\big(A, d^A\big)$ ist ein sogenannter Unterraum von $(X, d)$. Beispielsweise ist die N-Sphäre*

$$S^N := \left\{x \in \mathbb{R}^{N+1} \;\middle|\; \|x\|_2 = 1\right\}$$

*bzw. die N+1-Kugel*

$$B^{N+1} := \left\{x \in \mathbb{R}^{N+1} \;\middle|\; \|x\|_2 \leq 1\right\}$$

*ein abgeschlossener Unterraum des $\mathbb{R}^{N+1}$.*

*Beachte:* $\partial B^{N+1} = S^N$.

**Satz 6.0.15.**

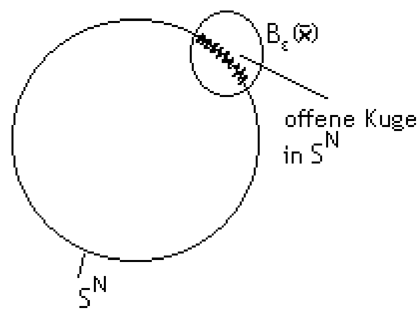
*$V \subset A \subset X$.*
*äq*

(i) *$V$ offen in $A$, d.h. $V \in T_{d^A}$*

(ii) *Es gibt eine (in $X$) offene Menge $U \subset X$, d.h. $U \in T_d$, so dass $V = U \cap A$.*

$T_{d^A} = T|A := \{U \cap A \mid U \subset X \text{ offen}\}$ ist die sogenannte **Relativ-Topologie** von $A$.

Die folgende Skizze illustriert die Situation für den Fall $X := \mathbb{R}^{N+1} := \mathbb{R}^2$ und $A := S^N := S^1$.
Ist $x \in S^1$ ein Punkt auf der Einheitskreislinie, so ist seine $\varepsilon$-Umgebung im $\mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe, seine $\varepsilon$-Umgebung bezüglich der Relativ-Topologie auf $S^1$ hingegen ist der Durchschnitt dieser Kreisscheibe mit $S^1$, also ein Bogenstück.




**Folgerung 6.0.16.**

*$\iota : A \longrightarrow X, a \mapsto a$, ist stetig.*

**Folgerung 6.0.17.**

*$A \subset X, f : X \longrightarrow Y$*

*äq*

(i) *$f$ stetig*

(ii) *Zu jeder offenen Menge $U \subset Y$ gibt es eine offene Menge $W \subset X$ so dass $f^{-1}(U) = A \cap W$.*

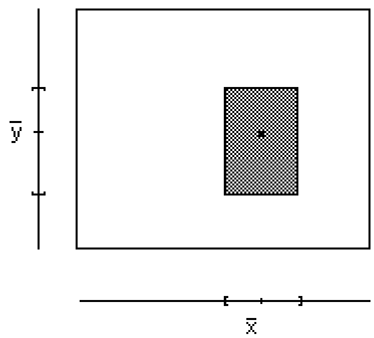
**Bemerkung 6.0.18.**

*Sind $(X_i, d_i), i = 1, 2$ zwei metrische Räume, so ist das Produkt $X := X_1 \times X_2$ auf natürliche Weise ein metrischer Raum bzgl. der Metrik*

$$d((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = \max_{i=1,2} d_i(x_i, x_i')$$

*Die 'Kugeln' im Produkt sind Produkte der 'Kugeln' in den Faktoren:*

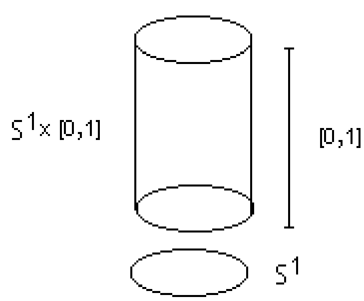
$$B_\varepsilon((\overline{x},\overline{y})) = B_\varepsilon(\overline{x}) \times B_\varepsilon(\overline{y})$$



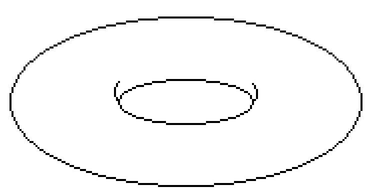

*und die Projektionen* $pr_i : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i,\ (x_1,x_2) \mapsto x_i,\ i = 1,2$
*sind stetig, da z.B. für* $U \subset X_1$ *offen gilt:* $p_1^{-1}(U) = U \times X_2$ *offen in* $X_1 \times X_2$.

Beispiele von Produkten sind neben $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

der Zylinder $S^1 \times [0,1]$




und der Torus $S^1 \times S^1$



**Satz 6.0.19.**

$$Z \xrightarrow{f} X \times Y \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{pr_1} X \\ \xrightarrow[pr_2]{} Y \end{array}$$

*äq*

(i) *$f$ ist stetig.*

(i) *Die Kompositionen $f_i := pr_i \circ f$ sind stetig.*

**Folgerung 6.0.20.**

$(x_n, y_n), (\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

*äq*

(i) $(x_n, y_n) \longrightarrow (\overline{x}, \overline{y})$

(ii) $x_n \longrightarrow \overline{y}$ *und* $y_n \longrightarrow \overline{y}$.

**Folgerung 6.0.21.**

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}^N, \;\; x \mapsto f(x) = (f_1(x), \ldots , f_N(x))$.
$f$ *ist stetig genau dann, wenn alle Koordinaten* $f_i$ *stetig sind.*

**Ex:** $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
$p$ ist eine stetige Surjektion auf $S^1$.