6.1 Zusammenhang und Kompaktheit

X metrischer Raum, $Y \subset X$.

Definition 6.1.0.

(1) X *zusammenhängend* $:\Longleftrightarrow$
Es gibt keine nicht-leeren, disjunkten, offenen Mengen $U, V \subset X$, *so dass* $X = U \cup V$.

(2) Y *ist zusammenhängend, falls es als Unterraum zusammenhängend ist.*

Offenbar ist X genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Mengen in X sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

Theorem 6.1.1.

$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$

äq:

(i) I *ist zusammenhängend*

(ii) I *ist ein Intervall.*

Da das Produkt zusammenhängender metrischer Räume wieder zusammenhängend ist (Beweis ÜA), gilt die

Folgerung 6.1.2. $\mathbb{R}^N$ *ist zusammenhängend.*

Beweis des Theorems::
(i) $\Rightarrow$ (ii): Ist I kein Intervall, so gibt es $x, y \in I$, $x < y$, so dass $[x, y] \not\subset I$. Dann gibt es aber ein $z \in [x, y]$ mit $z \notin I$. $I \cap (-\infty, z)$, $I \cap (z, \infty)$ sind offen in I, nicht-leer, disjunkt und $I = (I \cap (-\infty, z)) \cup (I \cap (z, \infty))$, ein Widerspruch.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei U, V offen in I, so dass $I = U \cap V$, $U \cap V = \emptyset$, $U, V \neq \emptyset$. Dann gibt es ein nicht-ausgeartetes Intervall $[a, b] \subset I$ so dass $a \in U$, $b \in V$, d.h. Œ $I = [a, b]$.
Sei $A := \{\tau \in [a, b] \big| [a, \tau] \subset U\}$, $\tau_* := \sup A$. Dann liegt $[a, \tau_*)$ ganz in U, also $[a, \tau_*] \subset U$, da U abgeschlossen in $[a, b]$. Analog: $[\tau_*, b] \subset V$, also $\{\tau_*\} = [a, \tau_*] \cap [\tau_*, b] \subset U \cap V = \emptyset$, ein Widerspruch. $\square$

Theorem 6.1.3. (Zwischenwertsatz)

$f : X \longrightarrow Y$ *stetig,* X *zusammenhängend. Dann ist auch das Bild* $f(X)$ *zusammenhängend.*

Beweis : Sonst gibt es offene Mengen $U, V \subset Y$, so dass $f(X) \subset U \cup V, f(X) \cap U \neq \emptyset, f(X) \cap V \neq \emptyset$, $f(X) \cap (U \cap V) = \emptyset$. Dann ist aber $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ eine offene, disjunkte Zerlegung von X durch zwei nicht-leere Mengen. $\square$

Definition 6.1.4.

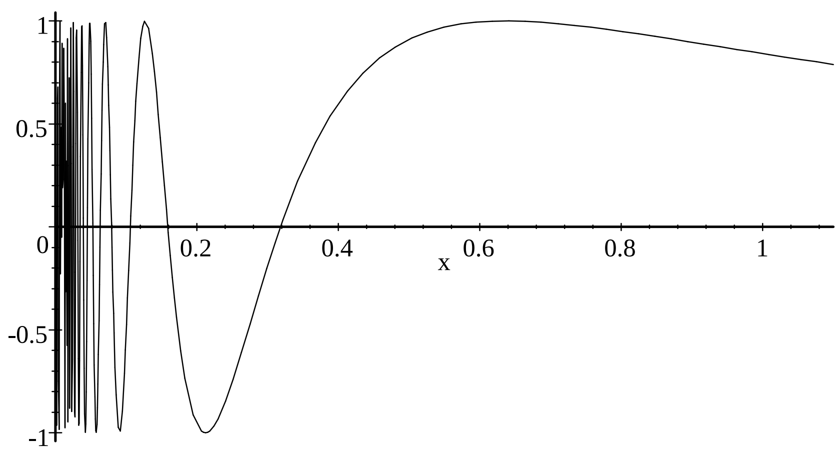
X *bogenweise zusammenhängend* $:\Longleftrightarrow$ *Zu je zwei Punkten* $a, b \in X$ *gibt es eine stetige Abbildung* $\varphi : [0, 1] \longrightarrow X$ **(Weg)** *mit Anfangspunkt* $\varphi(0) = a$ *und Endpunkt* $\varphi(1) = b$.

Bemerkung 6.1.5.

X bogenweise zusammenhängend $\underset{\substack{\not\Leftarrow\\ i.a.}}{\Longrightarrow}$ X zusammenhängend.

Ex:

[1] Die Menge $X := \overline{\left\{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\right\}} = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \mid 0 < x \leq 1\right\} \cup \left\{(0, y) \mid |y| \leq 1\right\}$ ist zusammenhängend, aber nicht bogenweise zusammenhängend:



[2] Für $N > 1$ ist $\mathbb{R}^N \setminus pt$ bogenweise zusammenhängend.

Ⓢ $\mathbb{R}^N \not\approx \mathbb{R}$, *falls* $N > 1$.

Beweis : Ist nämlich $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus, so ist auch die Einschränkung $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Homöomorphismus und damit $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Intervall, ein Widerspruch. ('**Prinzip der Herausnahme eines Punktes**'). □

Ex: Da die Abbildung $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \twoheadrightarrow S^{N-1}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|_2}$ stetig ist, ist die Sphäre S^{N-1} für $N > 1$ zusammenhängend.

Ⓢ *$f : S^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $N > 1$. Dann gibt es ein $x \in S^{N-1}$, so dass*

$$f(x) = f(-x).$$

Beweis : Das Bild der Abbildung $g(x) := f(x) - f(-x)$ ist nämlich ein Intervall, das symmetrisch zum Nullpunkt liegt. $\square$

Bezeichnung:

Eine **(offene) Überdeckung** einer Teilmenge $A \subset X$ ist eine Familie $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von (offenen) Mengen $U_\lambda \subset X$, so dass

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda.$$

Ex: $\Big((\frac{1}{n+1}, 1)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von $(0, 1)$.

Definition 6.1.6.

$A \subset X$.
A kompakt : $\Longleftrightarrow$ Zu jeder offenen Überdeckung $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von A gibt es endlich viele Indizes $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$, so dass $A \subset U_{\lambda_0} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n}$.

Ex:

[1] X mit der diskreten Topologie. Dann gilt: X kompakt $\Longleftrightarrow$ $\#X < \infty$.

[2] $(0, 1)$ nicht kompakt.

Theorem 6.1.7. *$a \leq b \Longrightarrow$ $[a, b]$ kompakt.*

Beweis : (U_λ) irgendeine offene Überdeckung von $[a, b]$.
$A := \{\tau \in [a, b] \big|$ Es gibt endlich viele Indizes $\lambda_0 \ldots \lambda_n$, so dass $[a, \tau] \subset U_{\lambda_0} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n}\}$.
$\tau_* := \sup A$ existiert, $a < \tau_* \leq b$. Da (U_λ) offene Umgebung, gibt es ein λ_*, so dass $\tau_* \in U_{\lambda_*}$.
Da U_{λ_*} offen, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $(\tau_* - \delta, \tau_* + \delta) \subset U_{\lambda_*}$. Œ liegt $\tau_* - \frac{\delta}{2}$ in A. Deshalb gibt es $U_{\lambda_0}, \ldots, U_{\lambda_n}$, so dass $\big[a, \tau_* - \frac{\delta}{2}\big] \subset U_{\lambda_0} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n}$, also

$$\big[a, \tau_* + \tfrac{\delta}{2}\big] \cap [a, b] \subset U_{\lambda_0} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n} \cup U_{\lambda_*}.$$

Daher ist $\tau_* = b$ und $[a, b] \subset U_{\lambda_0} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n} \cup U_{\lambda_*}$. $\square$

Satz 6.1.8.

$A \subset X$ kompakt $\Longrightarrow A = \overline{A}$, A beschränkt, d.h. A liegt in einer geeigneten Kugel.

Beweis : $(B_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}_+}$ ist eine offene Überdeckung von A.
Œ $A \neq X$. Wähle $a \in X \setminus A$. $V_r := \{x \mid d(x, a) > r\}$, $r > 0$. V_r offen, $V_r \subset V_{r'}$, falls $r > r'$, $X \setminus \{a\} = \bigcup_{r>0} V_r \supset A$, da $a \notin A$. Da A kompakt, gibt es endlich viele $r_0, \ldots, r_n$, so dass bereits $A \subset V_{r_0} \cup \ldots \cup V_{r_n} = V_{\overline{r}}$ mit $\overline{r} := \min\{r_0, \ldots, r_n\}$; also gilt $B_{\overline{r}}(a) \cap A = \emptyset$. $\square$

Satz 6.1.9. (Allgemeines Intervallschachtelungsprinzip)

$$X \supsetneqq A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots, \quad A_k \neq \emptyset, \quad A_k \textit{ kompakt } \Longrightarrow \bigcap_{k\geq 0} A_k \neq \emptyset.$$

Beweis : Andernfalls wäre $A_0 \subset X = \mathcal{C}\ \emptyset = \mathcal{C} \bigcap_{k\geq 0} A_k = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{C} A_k =: \bigcup_{k\geq 0} U_k$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge A_0, d.h. es gäbe endlich viele Indizes $k_0 < \ldots < k_n$, so dass

$$A_0 \subset \bigcup_{j=0}^{n} U_{k_j} = \bigcup_{j=0}^{n} \mathcal{C} A_{k_j} = \mathcal{C} \bigcap_{j=1}^{n} A_{k_j}.$$

Dieser Durchschnitt ist aber wegen $\mathcal{C} A_{k_j} \subset \mathcal{C} A_{k_{j+1}}$ gleich $\mathcal{C} A_{k_0}$. Aus $A_0 \subset \mathcal{C} A_{k_0}$ folgt aber $\mathcal{C} A_0 \supset A_{k_0}$, ein Widerspruch. □

Satz 6.1.10. *X kompakt, $A = \overline{A} \subset X \Longrightarrow A$ kompakt.*

Beweis : Ist (U_λ) eine offene Überdeckung von A, so ist $X \smallsetminus A$, U_λ, $\lambda \in \Lambda$, eine offene Überdeckung von X. □

Theorem 6.1.11. (Heine[1]-Borel)[2]

$A \subset \mathbb{R}^N$

äq

(i) *A kompakt*

(ii) *A abgeschlossen und beschränkt.*

Folgerung 6.1.12.

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann existiert $\min A$ *und* $\max A$.

Ex: Die Sphäre S^{n-1} und der Ball B^n sind kompakt:
Für $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$, gilt $S^{n-1} = f^{-1}(0)$, $B^n = f^{-1}[0,1]$, und die Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen sind abgeschlossen.

Da abgeschlossene beschränkte Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ kompakt sind, folgt das Theorem von Heine-Borel aus dem Theorem von Tychonoff.

Theorem 6.1.13. (Tychonoff[3])

X, Y kompakt $\Longrightarrow$ $X \times Y$ kompakt.

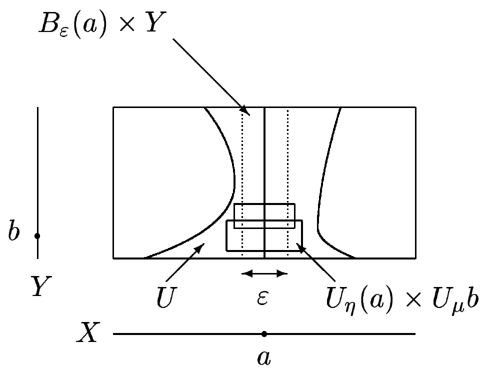
[1] Eduard Heine (1821 - 1881), deutscher Mathematiker
[2] Emile Borel (1871 - 1956), französischer Mathematiker
[3] Andrei Nikolaevich Tikhonov (1906 - 1993), russischer Mathematiker

[Hs] (Tubenlemma)

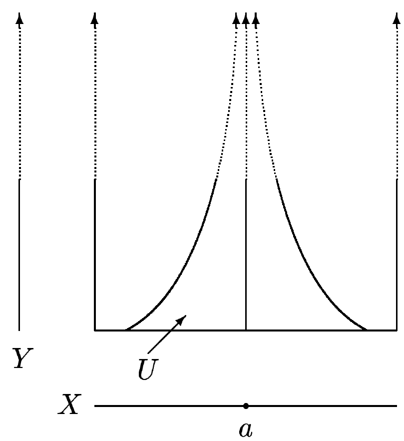
X metrischer Raum, Y kompakt, $a \in X$, $U \subset X \times Y$ offen, so dass $a \times Y \subset U$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass
$$B_\varepsilon(a) \times Y \subset U.$$

Eine Tubenumgebung $B_\varepsilon(a) \times Y \subset U$ existiert immer, wenn Y kompakt ist, existiert hingegen i.a. *nicht*, wenn Y nicht kompakt ist:

Y kompakt:



Y nicht kompakt:



Beweis des Theorems von Tychonoff:
(U_λ) offene Überdeckung von $X \times Y$, $a \in X$. Dann ist (U_λ) auch offene Überdeckung des kompakten Raumes $a \times Y$, also gibt es endlich viele Indizes $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, so dass
$$a \times Y \subset U_{\lambda_0} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n} =: V_a$$
Da V_a offen, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass
$$B_{\varepsilon_a}(a) \times Y \subset V_a.$$
$(B_{\varepsilon_a}(a))_{a \in X}$ ist eine offene Überdeckung von X. Deshalb gibt es endlich viele $a_0, \dots, a_m$, so dass $X \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon_{a_i}}(a_i)$, d.h. $X \times Y \subset V_{a_0} \cup \ldots \cup V_{a_m}$. Daher wird $X \times Y$ bereits durch endlich viele U_λ's überdeckt. $\square$

Satz 6.1.14.

Jede Folge (x_n) eines kompakten metrischen Raumes hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis : $A_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}} \neq \emptyset$, kompakt, $A_{n+1} \subset A_n$. Also gibt es ein $\overline{x} \in \bigcap_{n \geq 0} A_n$ im Durchschnitt. Da $\overline{x} \in A_n$, existiert zu $n \geq 0$ ein $k_n \geq n$, so dass $d(x_{k_n}, \overline{x}) \leq \frac{1}{n}$. Œ $k_n \nearrow$. $\square$

Folgerung 6.1.15. (Bolzano[4]-Weierstrass[5])

Jede beschränkte Folge des $\mathbb{R}^N$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Folgerung 6.1.16.

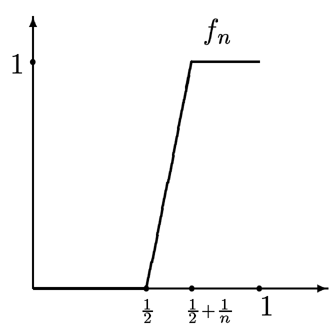
$\mathbb{R}^N$ *vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Folgerung 6.1.17.

Jeder kompakte metrische Raum (X, d) *ist vollständig.*

Beweis : Ist (x_n) eine CF in X, so besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to \overline{x}$.
$\overline{x}$ ist auch Grenzwert der ursprünglichen Folge:
$d(x_n, \overline{x}) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \overline{x}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, k \geq N$. □

Ex: $(C[0,1], d_\infty)$ ist vollständig, nicht aber $(C[0,1], d_1)$.



(f_n) ist eine d_1-Cauchyfolge,
aber nicht d_1-konvergent.

Theorem 6.1.18. (Fixpunktsatz von Banach[6])

X vollständig, $f : X \longrightarrow X$ **kontrahierend**, *d.h. es gibt ein $0 \leq \Delta < 1$, so dass*

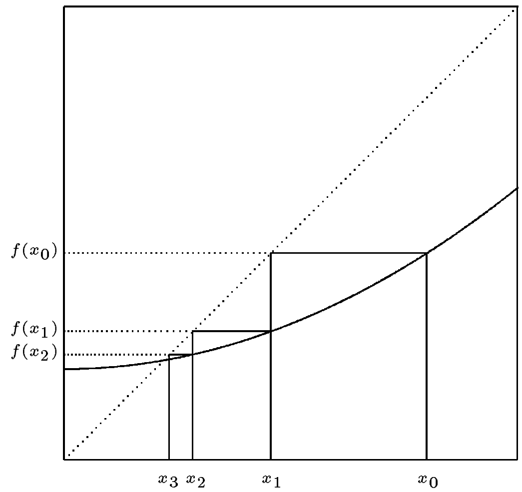
$$d(f(x), f(y)) \leq \Delta \cdot d(x, y) \text{ für alle } x, y \in X.$$

Dann gibt es genau ein $\overline{x} \in X$ mit $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

[4] Bernhard Bolzano (1781 - 1848), wegen liberaler Ansichten 1819 mit Berufs- und Publikationsverbot belegter Prager Theologieprofessor, in dessen Nachlass sich viele mathematische Arbeiten fanden, davon etliche bis heute unveröffentlicht.

[5] Karl Weierstrass (1815 - 1897), Gymnasiallehrer für Mathematik in Ostpreußen, mit 49 Jahren zum ordentlichen Professor in Berlin ernannt.

[6] Stefan Banach (1892 - 1945), polnischer Mathematiker



Beweis :
Eindeutigkeit: Wären $\overline{x}$, $\overline{x}'$ zwei verschiedene Fixpunkte, so wäre

$$d(\overline{x},\overline{x}') = d(f(\overline{x}), f(\overline{x}')) \leq \Delta \cdot d(\overline{x},\overline{x}') < d(\overline{x},\overline{x}'),$$

ein Widerspruch, also $\overline{x} = \overline{x}'$.

Existenz: $x_0 \in X$ beliebig, $x_n := f(x_{n-1})$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+k-j}, x_{n+k-j-1}) \\ &\leq d(x_{n+1}, x_n)(1 + \Delta + \cdots + \Delta^{k-1}) \\ &\leq d(f(x_0), x_0)\frac{\Delta^n}{1-\Delta}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Folglich ist (x_n) eine CF in X und hat daher einen Grenzwert $\overline{x} = \lim x_n$. Da f insbesondere stetig ist und $x_n := f(x_{n-1})$, ist $f(\overline{x}) = \overline{x}$. □

Bemerkung 6.1.19. *Der Fehler der Approximation beträgt*

$$d(\overline{x}, x_n) \leq d(f(x_0), x_0) \cdot \frac{\Delta^n}{1-\Delta}.$$

Ex: $1 < m \in \mathbb{N}$. Das Polynom $p(x) = (x-1)^m - x$ hat eine Nullstelle in $[1, \infty)$ genau dann, wenn $g : [1, \infty] \longrightarrow [1, \infty)$, $x \mapsto g(x) = 1 + \sqrt[m]{x}$ einen Fixpunkt hat.
$[1, \infty)$ ist abgeschlossen und damit vollständig. Mit $u := \sqrt[m]{x}$, $v := \sqrt[m]{y}$ folgt

$$|g(x) - g(y)| = |u - v| = \frac{|u^m - v^m|}{|u^{m-1} + u^{m-2}v + \dots|} \leq \frac{1}{m}|x - y|,$$

d.h. g hat den Kontraktionsfaktor $\Delta = \frac{1}{m} < 1$ und damit genau einen Fixpunkt $\overline{x}$ in $[1, \infty)$. Startet man mit $x_0 \geq 1$, so ist die Güte der Approximation

$$|\overline{x} - x_n| \leq \frac{1}{(m-1)m^{n-1}} \cdot |1 + \sqrt[m]{x_0} - x_0|.$$

Die Approximation ist also am schnellsten, wenn $|1+\sqrt[m]{x_0}-x_0|$ minimal ist, was genau für $x_0 := m^{\frac{m}{1-m}}$ der Fall ist.

Beachte: $p(1) = -1$, $p(x) > 0$ für $x \gg 1$. Daher hat p auf jeden Fall eine Nullstelle in $[1, \infty)$ nach dem ZWS.

Theorem 6.1.20.

$f : X \longrightarrow Y$ stetig, X kompakt. Dann ist auch das Bild $f(X)$ kompakt.

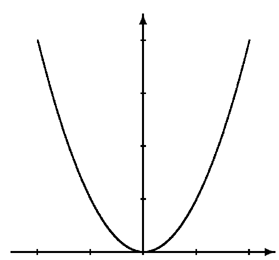
Beweis : (U_λ) offene Überdeckung von $f(X)$. Dann ist $(f^{-1}(U_\lambda))$ eine offene Überdeckung von X, also $X = f^{-1}(U_{\lambda_0}) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{\lambda_n}), \lambda_i$ geeignet. Wegen $ff^{-1}(U_\lambda) \subset U_\lambda$ überdecken die $U_{\lambda_0}, \ldots, U_{\lambda_n}$ das Bild $f(X)$. □

Folgerung 6.1.21.

Jede stetige Funktion $X \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Raum X hat ein Maximum/Minimum.

Beweis : Vgl. AI. □

WARNUNG: Das Urbild $f^{-1}(Y)$ eines kompakten Raumes Y ist i.a. nicht kompakt:
$sq : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, sq(x, y) := x^2 - y$.
$sq^{-1}(0)$ ist die Normalparabel, also nicht beschränkt, obwohl $\{0\}$ kompakt.



Satz 6.1.22.

$f : X \longrightarrow Y$ stetig, X kompakt. Dann ist f sogar gleichmäßig stetig.

Beweis : Sonst gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein Paar von Folgen $(x_n), (x'_n) \in X$, so dass

$$d\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \geq \varepsilon, \text{ aber } d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}.$$

Da X kompakt, Œ $x_n \to \overline{x}'$, also $d\big(f(\overline{x}), f(\overline{x}')\big) \geq \varepsilon$, andererseits ist $\overline{x} = \overline{x}'$. □

Ex: X kompakt, $F : X \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\tilde{F} : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{F}(x) := \int_0^1 F(x,t)dt$.
Dann ist $\tilde{F}$ ebenfalls stetig.

Ist $(V, \| \ \|)$ ein normierter Vektorraum und $f : X \longrightarrow V$ $\| \ \|$-beschränkt, d.h. es gibt ein $C \geq 0$, so dass $\|f(x)\| \leq C$ für alle $x \in X$, so ist

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

eine Norm auf $\mathbf{B(X,V)}$, dem Raum der $\| \ \|$-beschränkten Abbildungen von $X \longrightarrow V$.

Satz 6.1.23.

$f_n : X \longrightarrow V$ stetig, $f : X \longrightarrow V$, so dass $f_n \underset{\| \ \|_\infty}{\longrightarrow} f$.
Dann ist auch f stetig.

Beweis : Vgl. AI □

Theorem 6.1.24. (Dini[7])

X kompakt, $f_n, f \in CX$, so dass $f_n \nearrow f$.
Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen f, d.h. $f_n \underset{\| \ \|_\infty}{\longrightarrow} f$.

Beweis : Œ $f_n \searrow 0$ (ersetze f_n durch $f - f_n$), $\varepsilon > 0$.
Definiere $A_n := \{x \big| f_n(x) \geq \varepsilon\}$. Dann ist

(1) $A_{n+1} \subset A_n$,

(2) A_n kompakt.

Annahme: Alle $A_n \neq \emptyset$. Dann ist auch $\bigcap A_n \neq \emptyset$. Ist $a \in \bigcap A_n$, so gilt $f_n(a) \geq \varepsilon$ für alle n, ein Widerspruch zu $f_n \searrow 0$. Daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $A_N = \emptyset$, wegen (1) also $A_n = \emptyset$ für alle $n \geq N$. Damit folgt $f_n(x) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in X$. □

Ex: Integralgleichungen

Ⓢ *$K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\|K\|_\infty < 1$, $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.*
Dann gibt es genau ein $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so dass

(1) f stetig
(2) $f(x) = -g(x) + \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$.

Beweis : $\big(C[0,1], \| \ \|_\infty\big)$ ist vollständig. Für stetiges $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist

$$x \mapsto L(f)(x) := -g(x) + \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$$

stetig, da K gleichmäßig stetig ist; der Operator $L : C[0,1] \to C[0,1]$ ist kontrahierend, da

$$|L(f)(x) - L(f^\sharp)(x)| \leq \int_0^1 |K(x,y)| \, |f(y) - f^\sharp(y)| dy \leq \|K\|_\infty \cdot \|f - f^\sharp\|_\infty.$$

[7] Ulisse Dini (1845 - 1918), italienischer Mathematiker, seit dem 22. Lebensjahr Professor in Pisa

Für $1 < N \in \mathbb{N}_+$ induzieren f und K Treppenfunktionen

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &:= \begin{cases} f\left(\frac{j}{N}\right) & x \in \left(\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\hat{K}(x) &:= \begin{cases} K\left(\frac{j}{N}, \frac{k}{N}\right) & (x,y) \in \left(\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right) \times \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

und der Operator L hat das Analogon

$$\hat{L}(\hat{f})(x) = -\hat{g}(x) + \int_0^1 \hat{K}(x,y)\hat{f}(y)dy = -g\left(\tfrac{k}{N}\right) + \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} K\left(\tfrac{k}{N}, \tfrac{j}{N}\right) f\left(\tfrac{j}{N}\right)$$

falls $x \in \left(\frac{k}{N}, \frac{k}{N+1}\right)$. Identifiziert man $\hat{f}$ mit dem Vektor $\overset{\vee}{f} := \left(f(\frac{0}{N}), \dots, f(\frac{N-1}{N})\right) \in \mathbb{R}^N$ und $\hat{K}$ mit der Matrix $\overset{\vee}{K}_{j,k} = K(\frac{j}{N}, \frac{k}{N}) \in \mathbb{R}^{N \times N} = M_N(\mathbb{R})$, so ist die Fixpunktgleichung

$$\hat{f} = \hat{L}(\hat{f})$$

äquivalent zu der linearen Gleichung

$$\overset{\vee}{g} = \left(-E_N + \tfrac{1}{N}\overset{\vee}{K}\right)\overset{\vee}{f}.$$

Diese Gleichung ist für alle $\overset{\vee}{g} \in \mathbb{R}^N$ genau dann 1-deutig lösbar, falls

$$\det\left(-E_N + \tfrac{1}{N}\overset{\vee}{K}\right) \neq 0,$$

d.h. N kein Eigenwert von $\overset{\vee}{K}$ ist. Angenommen $0 \neq \mathrm{v} \in \mathbb{R}^N$ ist Eigenvektor zum Eigenwert N von $\overset{\vee}{K}$, also

$$N \cdot \mathrm{v} = \overset{\vee}{K} \cdot \mathrm{v}$$

Dann ist $N \cdot \|\mathrm{v}\|_\infty = \sup_i |\sum_j K_{ij} v_j| \leq N \cdot \|\overset{\vee}{K}\|_\infty \cdot \|\mathrm{v}\|_\infty$

d.h. $1 \leq \|\overset{\vee}{K}\|_\infty \leq \|K\|_\infty < 1$, ein Widerspruch. $\square$