6.2 Approximation stetiger Funktionen

Im Folgenden sei X ein metrischer Raum mit $\#X \geq 2$. Zu $a, b \in X, a \neq b$, gibt es dann stets eine stetige Funktion $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $h(a) = 0, h(b) > 0$, z.B. $x \mapsto h(x) := d(a, x)$.

Theorem 6.2.0. (Stone[1]- Weierstrass[2])

X kompakt, $\mathcal{A} \subset CX$, so dass

(1) *$\mathcal{A}$ $\mathbb{R}$-Untervektorraum*

(2) $f \in \mathcal{A} \Longrightarrow |f| \in \mathcal{A}$

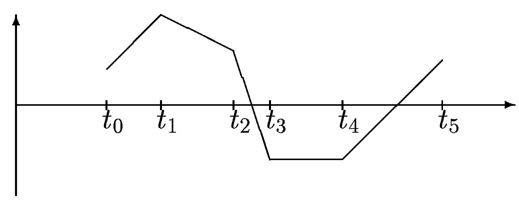
(3) *$\mathcal{A}$ punktetrennend, d.h. zu $a, b \in X$, $a \neq b$, gibt es ein $h \in \mathcal{A}$, so dass $h(a) = 0$, $h(b) \neq 0$.*

Dann ist $\overline{\mathcal{A}}^{\| \|_\infty} = CX$, d.h. zu jeder stetigen Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine Folge $f_n \in \mathcal{A}$, so dass $f_n \underset{\| \|_\infty}{\longrightarrow} f$.

Ex: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stückweise linear** $:\Longleftrightarrow$

(1) f stetig

(2) Es gibt eine Partition $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, so dass $f\big|_{[t_i, t_{i+1}]}$ affin.



Sind $PL[a, b]$ sämtliche stückweise linearen Funktionen auf $[a, b]$, so ist nach Stone-Weierstrass

$$\overline{PL[a, b]}^{\| \|_\infty} = C[a, b].$$

Dies kann man auch elementar einsehen, indem man ausnutzt, dass jede stetige Funktion $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sogar gleichmäßig stetig ist.

Folgerung 6.2.1. (Approximationssatz von Weierstrass)

X kompakt, $\mathcal{A} \subset CX$, so dass

(1) $1 \in \mathcal{A}$

(2) $\mathcal{A}$ $\mathbb{R} - Linksalgebra$

(3) *$\mathcal{A}$ punktetrennend.*

Dann ist $\overline{\mathcal{A}}^{\| \|_\infty} = CX$.

[1] Marshall Harvey Stone (1903 - 1989), amerikanischer Mathematiker
[2] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass(1815 - 1897), deutscher Mathematiker

Beweis : $\overline{\mathcal{A}}$ ist ebenfalls eine unitäre (d.h. $1 \in \overline{\mathcal{A}}$), punktetrennende $\mathbb{R}$-Algebra. Für $f \in \overline{\mathcal{A}}$ liegt auch $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$, also $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}} = CX$.
Denn: Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein Polynom p, so dass

$$\big|p(t) - |t|\big| < \varepsilon \text{ für alle } |t| \leq 1,\ p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n.$$

Für $g := f/1 + \|f\|_\infty$ ist dann

$$\big|p \circ g(x) - |g(x)|\big| < \varepsilon \text{ für alle } x \in X,\ p \circ g = a_0 + a_1 g + \ldots + a_n g^n \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Wegen $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$, $\big\|p \circ g - |g|\big\| < \varepsilon$, ist $|g| \in \overline{\mathcal{A}}$. □

Folgerung 6.2.2.

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßiger Limes von Polynomen.

Beweis : Die $\mathbb{R}$-Algebra der auf $[a, b]$ eingeschränkten Polynome ist unitär und punktetrennend. □

Definition 6.2.3.

Stetige Funktionen $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $v : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ induzieren einen stetige Funktion

$$u \otimes v : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \otimes v(x, y) := u(x) \cdot v(y)$$

Der $\operatorname{span}\{u \otimes v \big| u \in CX, v \in CY\}$ *ist das sogenannte* **Tensorprodukt** *von CX und CY,*

$$CX \otimes CY := \operatorname{span}\{u \otimes v\} \subset C(X \times Y)$$

.

Folgerung 6.2.4.

$$X,\ Y \textit{ kompakt} \implies C(X \times Y) = \overline{CX \otimes CY}^{\|\ \|_\infty},$$

d.h. zu jeder stetigen Funktion $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es stetige Funktionen $u_1, \ldots, u_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $v_1, \ldots, v_n : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\Big\|f - \sum_i u_i \otimes v_i\Big\|_\infty < \varepsilon.$$

Beweis des Theorems von Stone-Weierstrass:

(1) Zu $a, b \in X$, $a \neq b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es ein $f \in \mathcal{A}$, so dass $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Wähle dazu zunächst $h, k \in \mathcal{A}$ mit

$$\begin{aligned} h(a) &= 1, \quad h(b) = 0,\\ k(a) &= 0, \quad k(b) = 1. \end{aligned}$$

$f := \alpha \cdot h + \beta \cdot k$ macht's.

(2) Zu $f \in CX$, $a, b \in X$, $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Umgebung V_b von b und ein $h_{a,b} \in \mathcal{A}$, so dass

   (i) $h_{a,b}(a) = f(a) - \frac{\varepsilon}{2}$
   (ii) $h_{a,b}(x) < f(x)$ für alle $x \in V_b$.

Ist $a = b$, wähle $h \in \mathcal{A}$, so dass
$h(a) = f(a) - \frac{\varepsilon}{2},\ V_b := (h-f)^{-1}\big((-\infty,0)\big) \ni b$;
ist $a \neq b$, wähle $h \in \mathcal{A}$, so dass
$h(a) = f(a) - \frac{\varepsilon}{2},\ h(b) = f(b) - \frac{\varepsilon}{2},\ V_b := (h-f)^{-1}\big((-\infty,0)\big) \ni b.$

(3) Zu $f \in CX$, $a \in X$, $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Umgebung U_a von a und $h_a \in \mathcal{A}$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &> h_a(x) && \text{für alle } x \in X,\\ h_a(x) &> f(x) - \varepsilon && \text{für alle } x \in U_a. \end{aligned}$$

Wähle dazu zu $b \in X$ nach (2) V_b und $h_{a,b} \in \mathcal{A}$. Da X kompakt, ist
$$X = V_{b_1} \cup \ldots \cup V_{b_n}, \quad b_i \text{ geeignet.}$$
Die Funktion $h_a := h_{a,b_1} \wedge \ldots \wedge h_{a,b_n}$ liegt in $\mathcal{A}$, $h_a \leq h_{a,b_i} < f$ auf V_{b_i}, $h_a(a) = h_{a,b_i}(a) = f(a) - \frac{\varepsilon}{2}$ für ein i geeignet.
Definiere $U_a := \{x \in X \big| h_a(x) > f(a) - \varepsilon\}$.

(4) Für geeignete Punkte $a_1, \ldots, a_m$ ist $X = U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_m}$. Die Funktion $h := h_{a_1} \vee \ldots \vee h_{a_m}$ liegt in $\mathcal{A}$, $f > h$, $h \geq h_{a_i} > f - \varepsilon$ auf U_{a_i}, also $f > h > f - \varepsilon$, d.h. $\|f-h\|_\infty < \varepsilon$ und damit $B_\varepsilon(f) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Beachte:
$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)$$
$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|)$$

□

Definition 6.2.5.

Ist $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_N)$, $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_N) \in \mathbb{R}^N$ *mit* $a_i \leq b_i$, $i = 1, \ldots, N$, *so nennt man*
$$[\underline{a}, \underline{b}] := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$$
ein **N-dimensionales Intervall** *oder einen* **N-dimensionalen Quader** *mit dem Volumen*
$$\operatorname{vol}[\underline{a}, \underline{b}] := \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i).$$

Derartige Quader sind stets kompakt.

Für $1 \leq i < N$ und stetiges $f : [\underline{a}, \underline{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist nach Induktion die Abbildung

$$\begin{aligned} [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \ldots \times [a_N, b_N] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x_{i+1}, \ldots, x_n) &\longmapsto \int_{a_i}^{b_i} \Big(\ldots \Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots x_N) dx_1 \Big) \ldots \Big) dx_i \end{aligned}$$

stetig, insbesondere ist das Integral I von f über $[\underline{a}, \underline{b}]$

$$\begin{aligned} I :\ [\underline{a}, \underline{b}] &\longrightarrow \mathbb{R},\\ I(f) &:= \int_{a_N}^{b_N} \Big(\ldots \Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_N) dx_1 \Big) \ldots \Big) dx_N \end{aligned}$$

wohldefiniert.

EX: $f : [0,\pi] \times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \sin(x+y)$

$I(f) = \int_0^\pi \Big(\int_0^\pi \sin(x+y)dx \Big) dy = \int_0^\pi \big(\cos y - \cos(\pi + y)\big) dy = 0.$

Satz 6.2.6.

Die Abbildung $I : C[\underline{a}, \underline{b}] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto I(f)$ *ist*

I 1: $\mathbb{R}$-*linear*

I 2: *positiv, d.h.* $I(f) \geq 0$ *für* $f \geq 0$.

Folgerung 6.2.7. $|I(f)| \leq \|f\|_\infty \cdot \mathrm{vol}[\underline{a}, \underline{b}]$.

Folgerung 6.2.8. *I stetig, d.h.* $\quad f_n \underset{\|\;\|_\infty}{\longrightarrow} f \quad \Longrightarrow \quad I(f_n) \to I(f)$.

Folgerung 6.2.9. $f_n, f \in C[\underline{a}, \underline{b}],\ f_n \nearrow f \quad \Longrightarrow \quad I(f_n) \nearrow I(f)$.

Beweis : Nach Dini konvergiert f_n sogar gleichmäßig gegen f, $\ I(f_n) \leq I(f)$. □

Satz 6.2.10.

I ist unabhängig von der Integrationsreihenfolge,
d.h. ist $\pi : \{1, \ldots, N\} \longrightarrow \{1, \ldots, N\}$ *eine Permutation, so ist*

$$I(f) = \int_{a_{\pi(N)}}^{b_{\pi(N)}} \Big(\ldots \Big(\int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} f(x_1, \ldots, x_N) dx_{\pi(1)} \Big) \ldots \Big) dx_{\pi(N)}.$$

Beweis : Ist I^π das rechtsstehende Integral, so ist I^π ebenfalls stetig und stimmt auf $C[a_1, b_1] \otimes \ldots \otimes C[a_N, b_N]$ mit I überein, wegen der Stetigkeit und dem Weierstrass'schen Approximationssatz also überall. □

6.2.11. *Ausblick*

In der Vorlesung A III wird gezeigt werden, dass man kompakten Mengen $X \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *auf sinnvolle Weise ein Volumen* $vol_{N+1}(X) \geq 0$ *zuordnen kann, so dass*

(1) $\mathrm{vol}[\underline{a}, \underline{b}] = \prod_{i=1}^{N+1} (b_i, a_i)$

(2) $\mathrm{vol}(X \cup Y) = \mathrm{vol}(X) \cup \mathrm{vol}(Y) - \mathrm{vol}(X \cap Y)$

Ist $[\underline{a}, \underline{b}] \subset \mathbb{R}^N$ *ein* N*-dimensionales Intervall und* $f : [\underline{a}, \underline{b}] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *stetig, so ist*

$$X := \big\{ (x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \;\big|\; x \in [\underline{a}, \underline{b}], 0 \leq z \leq f(x) \big\}$$

kompakt und

$$\mathrm{vol}_{N+1}(X) = \int_{[\underline{a}, \underline{b}]} f(x) dx.$$

Ex:

$$f : [-1,1] \times [-1,1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+,$$
$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier ist
$$X = [-1,1] \times [-1,1] \times \{0\} \cup B^3_+ ,$$
wobei
$$B^3_+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\right\}$$
die obere Halbkugel ist. Da
$$\mathrm{vol}_3[-1,1] \times [-1,1] \times \{0\} = 0,$$
ist
$$\mathrm{vol}_3(B^3_+) = \mathrm{vol}_3 X = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-r(y)}^{r(y)} \sqrt{1-x^2-y^2}dx \right) dy,$$
wobei $r(y) := \sqrt{1-y^2}$. Mit der Substitution $x = r \cdot t$ folgt
$$\mathrm{vol}_3 B^3_+ = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}dx \right) dy = \int_{-1}^{1} r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt\, dy = \int_{-1}^{1} (1-y^2)\frac{\pi}{2}dy = \frac{2}{3}\pi.$$
Insbesondere:
$$\mathrm{vol}_3(B^3) = \frac{4}{3}\pi.$$

Definition 6.2.12.

Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem metrischen Raum X, so heißt der Abschluss
$$tr(f) := \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}}$$
der **Träger von f**.
$$K(X) := \{f \in CX | tr(f) \text{ kompakt}\}$$
ist die $\mathbb{R}$-Algebra der stetigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger.

Bemerkung 6.2.13.

[1] $1 \in K(X) \quad \Longleftrightarrow \quad X$ *kompakt.*

[2] $f_n \in K(X),\ f_n \underset{\| \|_\infty}{\longrightarrow} f \quad \underset{i.a.}{\not\Rightarrow} \quad f \in K(X).$

[3] $f \in K(\mathbb{R}^N) \quad \Longleftrightarrow \quad$ *Es gibt ein $C \geq 0$, so dass $f(x) = 0$ für alle $\|x\|_\infty \geq C$.*

[4] $f \in K(\mathbb{R}^N),\ \mathrm{v} \in \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow \quad f^{\mathrm{v}} \in K(\mathbb{R}^N)$, *wobei $f^{\mathrm{v}}(x) := f(x+\mathrm{v})$.*

[5] $f \in K(\mathbb{R}^N)$, *so dass* $tr(f) \subset [\underline{a}, \underline{b}] \cap [\underline{a}', \underline{b}']$.
Dann ist

$$I_{[\underline{a},\underline{b}]}(f) = I_{[\underline{a},\underline{b}]\cap[\underline{a}',\underline{b}']}(f) = I_{[\underline{a}',\underline{b}']}(f),$$

d.h. das Integral

$$I(f) := I_{[\underline{a},\underline{b}]}(f), \quad tr(f) \subset [\underline{a}, \underline{b}]$$

ist wohldefiniert.

Theorem 6.2.14.

Die Abbildung $I : K(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f \longmapsto I(f) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx := I_{[\underline{a},\underline{b}]}(f), \quad tr(f) \subset [\underline{a}, \underline{b}],$$

ist wohldefiniert und hat folgende Eigenschaften:

I 1: *I $\mathbb{R}$-linear,*

I 2: *I positiv, d.h. $I(f) \geq 0$ für $f \geq 0$,*

I 3: *I translationsinvariant, d.h. $I(f^{\mathrm{v}}) = I(f)$ für alle $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^N$.*

Theorem 6.2.15. *(ohne Beweis)*

Ist $\mu : K(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass

(1) *μ $\mathbb{R}$-linear,*

(2) *μ positiv,*

(3) *μ translationsinvariant,*

dann gibt es genau ein $\lambda \geq 0$, so dass $\mu = \lambda \cdot I$.

Beweis der Translationsinvarianz von I:
$f \in K(\mathbb{R}^N)$, $R \gg 0$, so dass $tr(f) \subset X := [-R, R] \times \ldots \times [-R, R]$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein

$$g \in C[-R, R] \otimes \ldots \otimes C[-R, R],$$

so dass

$$\left\| f\big|_X - g \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2^{N+1} R^N}.$$

Für $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^N$ ist auf $X - \mathrm{v}$ ebenfalls

$$\|f^{\mathrm{v}} - g^{\mathrm{v}}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2^{N+1} R^N},$$

also $|I(f) - I(f^{\mathrm{v}})| < \varepsilon + |I(g) - I(g^{\mathrm{v}})|$. Die Funktion g ist eine endliche Linearkombination von Funktionen $g_1 \cdot \ldots \cdot g_N$, $\quad g_i : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R}$. Aufgrund der 1-dimensionalen Transformationsformel ist

$$I\big((g_1 \cdot \ldots \cdot g_N)^{\mathrm{v}}\big) = \prod_{i=1}^{N} \int_{-(R-\mathrm{v}_i)}^{R-\mathrm{v}_i} g_i^{\mathrm{v}_i}(t)dt = \prod_{i=1}^{N} \int_{-R}^{R} g_i(t)dt = I(g_1 \cdot \ldots \cdot g_N),$$

d.h. $I(g^{\mathrm{v}}) = I(g)$. $\square$

Folgerung 6.2.16.

$tr(f) \subset [\underline{a}, \underline{b}] \quad \Longrightarrow \quad |I(f)| \leq \|f\|_\infty \cdot \mathrm{vol}[\underline{a}, \underline{b}].$

Folgerung 6.2.17.

I stetig bzgl. monotoner Limiten, d.h.

$$f_n, f \in K(\mathbb{R}^N), f_n \nearrow f \quad \Longrightarrow \quad I(f_n) \nearrow I(f).$$

Beweis : $g_n := f - f_n \searrow 0$. Nach Dini konvergiert dann g_n gleichmäßig gegen 0 und es gilt

$$tr(g_n) \subset tr(g_0) \subset [\underline{a}, \underline{b}], \quad |I(g_n)| \leq \|g_n\|_\infty \cdot \mathrm{vol}[\underline{a}, \underline{b}].$$

□

Jeder lineare Isomorphismus $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ist ein endliches Kompositum linearer Isomorphismen des Typs (Gauß-Algorithmus)

$$D: \quad (x_1, \dots, x_N) \longmapsto (x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n), \quad \lambda \neq 0$$

und

$$S: \quad (x_1, \dots, x_N) \longmapsto (x_1, \dots, x_i + x_k, \dots, x_n).$$

Ist $f \in K(\mathbb{R}^N)$, $R > 0$, so dass

$$tr(f) \subset [-R, R] \times \ldots \times [-R, R] =: X,$$

so hat $f \circ D$ seinen Träger in

$$X_\lambda := [-R, R] \times \ldots \times \left[-\tfrac{R}{|\lambda|}, \tfrac{R}{|\lambda|}\right] \times \ldots \times [-R, R].$$

[HS] 1 $\quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (f \circ D)(x) \; |\det D| \; dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx.$

Beweis : Beachte: $|\lambda| = |\det D|$. Wähle $T > 0$, so dass $X \cup X_\lambda \subset [-T, T] \times \cdots \times [-T, T]$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $g \in C[-T, T] \otimes C[-T, T]$, so dass $\|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\lambda|) \mathrm{vol} X}$ auf $[-T, T] \times \cdots \times [-T, T]$, $\quad I_X(g) = I_{X_\lambda}\big((g \circ D) \cdot |\det D|\big)$.

$$\begin{aligned}
&\big|I(f) - I\big((f \circ D) \cdot |\det D|\big)\big| \\
&\qquad = \big|I_X(f) - I_{X_\lambda}\big((f \circ D) \cdot |\det D|\big)\big| \\
&\qquad \leq |I_X(f) - I_X(g)| + \big|I_X(g) - I_{X_\lambda}\big((g \circ D) \cdot |\det D|\big)\big| \\
&\qquad\qquad + \big|I_{X_\lambda}\big((g \circ D) \cdot |\det D|\big) - I_{X_\lambda}\big((f \circ D) \cdot |\det D|\big)\big| \\
&\qquad \leq \|f - g\|_\infty \cdot \mathrm{vol} X + \|f - g\|_\infty \cdot \mathrm{vol} X_\lambda \\
&\qquad < \varepsilon \;.
\end{aligned}$$

□

[HS] 2 $\quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (f \circ S)(x) \; |detS| \; dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx.$

Beweis : Beachte: $\det S = 1$, Œ $N = 2$, $S(x, y) = (x, x + y)$, $R > 0$, so dass

$$tr(f), tr(f \circ S) \subset [-R, R] \times [-R, R].$$

Dann ist

$$I(f \circ S) = \int_{-R}^{R} \int_{-2R}^{2R} f(x, x + y) dy\, dx = \int_{-R}^{R} \int_{-2R+x}^{2R+x} f(x, z) dz\, dx.$$

Für festes $x \in [-R, R]$ ist $[-R, R] \subset [-2R + x, 2R + x]$ und $z \mapsto f(x, z)$ verschwindet für $|z| \geq R$, d.h.

$$\int_{-2R+x}^{2R+x} f(x, z) dz = \int_{-R}^{R} f(x, z) dz,$$

also $\quad I(f \circ S) = I(f).$ □

Folgerung 6.2.18.

$f \in K(\mathbb{R}^N)$, $A \in GL_N(\mathbb{R})$, $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^N$. *Dann ist* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(A \cdot x + \mathrm{v})\ |\det A|\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx.$