Kapitel 7

Differenzierbare Abbildungen

7.0 Kurven

Definition 7.0.0.

(1) *Eine parametrisierte* **Kurve** c *des* $\mathbb{R}^N$ *ist eine stetige Abbildung* $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *eines nicht-ausgearteten Intervalls in den* $\mathbb{R}^N$.

(2) c **doppelpunktfrei** $:\iff$ c *injektiv.*

(3) c *auf* $[a, b]$ **stückweise stetig differenzierbar**$: \iff$ *Es gibt eine Teilung* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$*, so dass* $c_i\big|_{[t_k, t_k+1]}$ *stetig differenzierbar für* $i = 1, \ldots, N$*,* $k = 0, \ldots, n-1$.

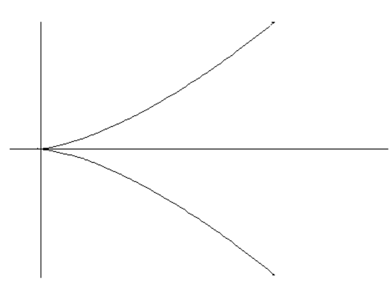
$\dot{c}(t) := (c_1'(t), \ldots, c_N'(t))$ *ist der sogenannte* **Tangentialvektor** *von* c *und* $\|\dot{c}(t)\|_2$ *die* **Geschwindigkeit** *von* c *zum Zeitpunkt* t.

Ex:

[1] Die Neill'sche Parabel

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (t^2, t^3)$$

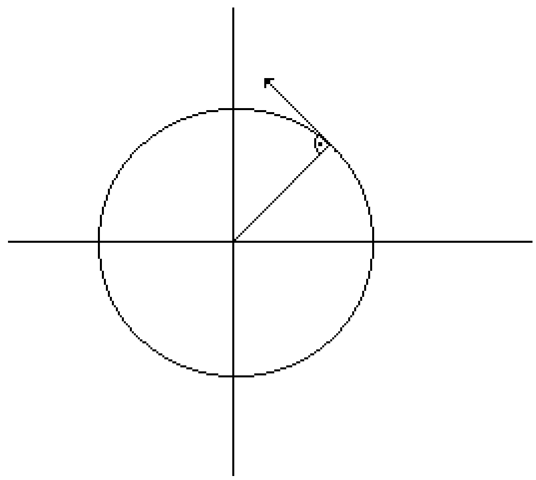
ist eine doppelpunktfreie, stetig differenzierbare Kurve mit $\dot{c}(0) = 0$.



[2] Die Kreislinie

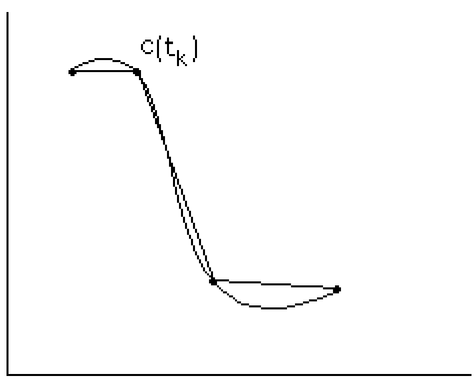
$$c : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (\cos t, \sin t)$$

ist nicht doppelpunktfrei, $\dot{c}(t) = (-\sin t, \cos t)$, $\|\dot{c}(t)\|_2 = 1$, $(c(t)|\dot{c}(t)) = 0$, d.h. $\dot{c}(t) \perp c(t)$.



Definition 7.0.1. $c : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ **rektifizierbar***:*

$$\Longleftrightarrow \ L(c) := \sup \left\{ \sum \|c(t_k) - c(t_{k+1})\|_2 \middle| a = t_0 < \cdots < t_n = b, \, n \in \mathbb{N}_+ \right\} < \infty.$$



Trivialerweise ist für eine rektifizierbare Kurve $\|c(b) - c(a)\|_2 \leq L(c)$. Die reelle Zahl $L(c)$ ist die sogenannte **Bogenlänge** von c. Beispielsweise hat $c : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ die Bogenlänge 2π (vgl. AI).

WARNUNG: Es gibt Kurven, die nicht rektifizierbar sind, z.B.

$$c : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, t \mapsto \begin{cases} 0 & t = 0 \\ (t, t \sin \frac{1}{t}) & t \neq 0 \end{cases}$$

Bemerkung 7.0.2.

[1] *c rektifizierbar $\iff$ alle Koordinatenfunktionen c_i sind von beschränkter Variation.*

[2] *L ist additiv, d.h. ist $a < x < b$, so ist $L(c) = L(c\big|_{[a,x]}) + L(c\big|_{[x,b]})$.*

[3] *$\tau : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a,b]$ stetig, surjektiv, streng monoton $\Longrightarrow L(c \circ \tau) = L(c)$. Ist τ streng monoton steigend, so spricht man von einer* **Umparametrisierung** *von c.*

Satz 7.0.3.

$c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ doppelpunktfrei und rektifizierbar.

äq

(i) $L(c) = \|c(b) - c(a)\|_2$

(ii) *Es gibt eine streng monoton steigende, stetige Surjektion $\pi : [0,1] \longrightarrow [a,b]$, so dass $s(t) := c \circ \pi(t) = c(a) + t\big(c(b) - c(a)\big)$, d.h. die 'Strecke' ist die 'kürzeste' Verbindung zweier Punkte.*

Beweis :

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\checkmark$
(i) $\Rightarrow$ (ii): $\varphi : [0,1] \longrightarrow [a,b]$ streng monoton steigende Surjektion z.B. $\varphi(t) = (b-a)t + a$,

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "c"] & \mathbb{R}^N \\
{[0,1]} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "c \circ \varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

$c \circ \varphi$ ist eine Umparametrisierung von c, $L(c) = L(c \circ \varphi)$, d.h. Œ $[a,b] = [0,1]$.
$s(t) := c(0) + t(c(1) - c(0))$, $t \in [0,1]$. Ist $\tau \in [0,1]$ und $c(t) \notin$ bild s, so ist zunächst $\tau \in (0,1)$ und

$$L(c) = \|c(1) - c(0)\|_2 < \|c(1) - c(\tau)\|_2 + \|c(\tau) - c(0)\|_2 \le L(c),$$

ein Widerspruch. Beachte: $\|x + y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$ genau dann, wenn x, y linear abhängig. Daher gibt es zu jedem $\tau \in [0,1]$ ein $t \in [0,1]$ so dass $c(\tau) = s(t)$, insbesondere

$$|t - t'| = \frac{\|c(\tau) - c(\tau')\|_2}{\|c(1) - c(0)\|_2}.$$

Da c doppelpunktfrei ist, ist $\tau \mapsto t$ eine Abbildung, die außerdem stetig ist. Wegen $c(0) = s(0) = 0$, $c(1) = s(1) = 1$, ist diese Abbildung surjektiv und $-$ wieder aufgrund der Doppelpunktfreiheit $-$ injektiv, also streng monoton steigend. π ist dann gerade die Umkehrabbildung von $\tau \mapsto t$. $\square$

Ist $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Teilung von $[a,b]$, so dass $c\big|_{[t_k,t_{k+1}]}$ stetig differenzierbar ist, so ist die reelle Zahl

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\dot{c}(t)\|_2 dt$$

unabhängig von derartigen Teilungen und damit

$$\int_a^b \|\dot{c}(t)\|_2 dt := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\dot{c}(t)\|_2 dt$$

wohldefiniert.

Satz 7.0.4.

$c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann ist c rektifizierbar und

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_2 dt.$$

Ex: $c : [0,1] \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.
$\dot{c}(t) = 2\pi(-\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$, $\|\dot{c}(t)\|_2 = 2\pi$, $L(c) = \int_0^1 2\pi dt = 2\pi$.

Beweis des Satzes: Da c stückweise stetig differenzierbar, sind alle Koordinaten c_i von beschränkter Variation und damit c rektifizierbar. Wegen der Additivität der Bogenlänge und deren Invarianz bei Umparametrisierungen Œ $[a,b] = [0,1]$, c stetig differenzierbar, insbesondere ist also $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|_2$ stetig.
Wähle zu $0 < \varepsilon < 1$ ein $0 < \delta < 1$, so dass $|c_i'(t) - c_i'(\tau)| < \frac{\varepsilon}{2N}$ für alle $|t - \tau| < \frac{\delta}{2}$, $i = 1, \cdots, N$, sowie eine Teilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, so dass

(1) $|t_{k+1} - t_k| < \frac{\delta}{4}$

(2) $L(c) \leq \sum \|c(t_{k+1}) - c(t_k)\|_2 + \frac{\varepsilon}{2}$

Nach MWS gibt es dann ein $\tau_{ik} \in (t_k, t_{k+1})$, so dass

$$c_i(t_{k+1}) - c_i(t_k) = c_i'(\tau_{ik})(t_{k+1} - t_k).$$

Damit ist $\|c(t_{k+1}) - c(t_k)\|_2 = \lambda_k(t_{k+1} - t_k)$, wobei $\lambda_k := \|c_1'(\tau_{1k}), \ldots, c_N'(\tau_{Nk})\|_2$.

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \|\dot{c}(t)\|_2 & t = t_k \\ \lambda_k & t \in (t_k, t_{k+1}) \end{cases}$$

ist eine Treppenfunktion mit $\big\| \|\dot{c}\|_2 - \varphi \big\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und damit

$$I(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|_2 dt \leq I(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen $I(\varphi) = \sum \|c(t_{k+1}) - c(t_k)\|_2$ ist $L(c) - \frac{\varepsilon}{2} \leq I(\varphi) \leq L(c) + \frac{\varepsilon}{2}$, d.h.

$$L(c) - \varepsilon \leq \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|_2 dt \leq L(c) + \varepsilon.$$

□

7.0.5. Ausblick

[1] **Bogenlänge als Parameter**

$c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar, $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle t, $s(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\|_2 d\tau$. Dann ist $L(c) = s(b)$, $0 = s(a)$, $\dot{s}(t) = \|\dot{c}(t)\|_2 > 0$, d.h. $s : [a,b] \longrightarrow [0, L(c)]$ ist eine streng monoton steigende, differenzierbare Surjektion

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "c"] & \mathbb{R}^N \\ {[0,L]} \arrow[u, "s^{-1}"] \arrow[ur, "c \circ s^{-1} =: c^*"'] & \end{tikzcd}$$

Die Kurve c^* hat die Bogenlänge s als Kurvenparameter, $\|\dot{c}^*(s)\|_2 = 1$.

[2] **Kurvenintegrale**

Ist $c : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^N$ und f: bild $c \to \mathbb{R}^N$ stetig, dann heißt

$$\int_c (f(x)|dx) := \int_a^b (f(c(t)|\dot{c}(t))\, dt$$

das Kurvenintegral von f längs c. Es ist nach der Substitutionsregel unabhängig von der Parametrisierung

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "c"] & \mathbb{R}^N \\ {[a^*,b^*]} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "c \circ \varphi =: c^*"'] & \end{tikzcd}$$

$$\int_c (f(x)|dx) = \int_{c^*} (f(x)|dx)$$

und

$$\left| \int_C (f(x)|dx) \right| \leq L(c) \cdot \sup_{x \in \text{ bild}\, c} \|f(x)\|_2.$$

Ex: $c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $\quad \vee : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \overset{\vee}{x} := \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$.
Dann ist $(\overset{\vee}{x}|x) = 0$, d.h. $\overset{\vee}{x} \perp x$, $\|\overset{\vee}{x}\|_2 = \frac{1}{2}\|x\|_2$, und

$$\int_c (\overset{\vee}{x}|dx) = \int_0^1 \left(\overset{\vee}{c}(t)|\dot{c}(t)\right) dt = \int_0^1 \pi dt = \pi = \mathrm{vol}(B^2).$$

Ist $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene (stückweise) stetig differenzierbare Kurve, d.h. $c(t) = c(t')$ genau dann, wenn $\{t, t'\} = \{a, b\}$, dann zerlegt c den Restraum $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{bild}\, c$ in zwei disjunkte, zusammenhängende Teile Int(c) und Out(c), so dass Int(c) beschränkt, Out(c) unbeschränkt. Dies besagt gerade der **Jordan'sche Kurvensatz** (schwer).
Ist $\overline{\mathrm{Int(c)}}$ *-förmig, d.h. es gibt einen Punkt $x_* \in \overline{\mathrm{Int(c)}}$, so dass die Strecke

$$\{\lambda x + (1-\lambda)x_* | \lambda \in [0,1]\} \subset \overline{\mathrm{Int(c)}} \text{ für alle } x \in \overline{\mathrm{Int(c)}},$$

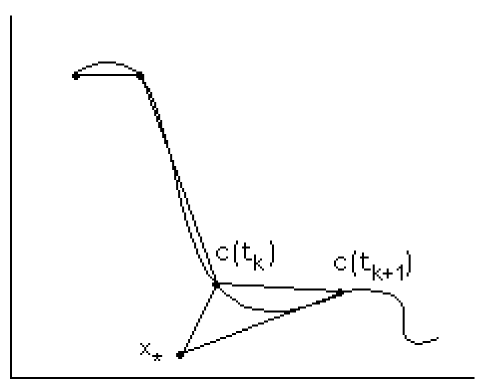
so ist die Fläche von $\overline{\mathrm{Int(c)}}$ gerade

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \Delta_{k,n}$$

wobei mit $t_k := a + \frac{k}{n}(b-a)$

$$\Delta_{k,n} := \frac{1}{2}\left|\det\left(c(t_{k+1}) - x_*, c(t_k) - x_*\right)\right|$$

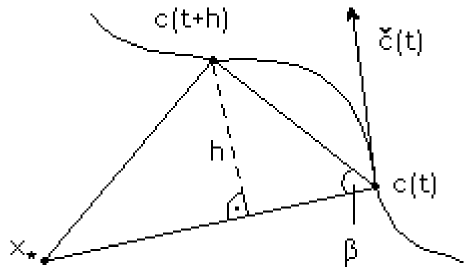
die Fläche des Dreiecks mit den Ecken x_*, $c(t_k)$, $c(t_{k+1})$ ist.



Theorem 7.0.6. (Stokes[1]): $\displaystyle\int_c (\overset{\vee}{x}|dx) = \mathrm{vol}(\overline{\mathrm{Int(c)}})$.

Beweis : $\Delta_{t,t+h}$ sei die Fläche des 3-Ecks mit den Ecken $x_*, c(t), c(t+h)$.

[1] Georg Gabriel Stokes (1819 - 1903), irischer Mathematiker und Physiker



$$
\begin{aligned}
\text{Dann ist } \Delta_{t,t+h} &= \tfrac{1}{2}\|c(t)\|_2 \cdot h \\
&= \tfrac{1}{2}\|c(t)\|_2 \cdot \|c(t+h)-c(t)\|_2 \cos(\tfrac{\pi}{2}-\beta) \\
&= \|\overset{\vee}{c}(t)\|_2 \cdot \|c(t+h)-c(t)\|_2 \cos(\tfrac{\pi}{2}-\beta) \\
&= \left(\overset{\vee}{c}(t)|c(t+h)-c(t)\right),
\end{aligned}
$$

also $\lim \frac{1}{h}\Delta_{t,t+h} = (\overset{\vee}{c}(t)|\dot{c}(t))$. Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\left|\Delta_{k,n} - \big(\overset{\vee}{c}(t_k)\big|\dot{c}(t_k)\big)(t_{k+1}-t_k)\right| < \frac{\varepsilon}{n},$$

d.h.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\Delta_{k,n} - \sum_{k=1}^{n}\big(\overset{\vee}{c}(t_k)\big|\dot{c}(t_k)\big)(t_{k+1}-t_k)\right| < \varepsilon.$$

Daher ist in der Grenze

$$\left|\mathrm{vol}\big(\overline{\mathrm{Int(c)}}\big) - \int_a^b \big(\overset{\vee}{c}(t9\big|\dot{c}(t)\big)dt\right| \leq \varepsilon.$$

□

[3] **Isoperimetrie**

$c:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ einfach geschlossene 2-mal stetig differenzierbare Kurve, $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle t.

Theorem 7.0.7. $L^2(c) \geq 4\pi \cdot \mathrm{vol}(\overline{\mathrm{Int(c)}})$. *Gleichheit tritt genau dann auf, wenn c einen Kreis vom Radius $L/2\pi$ parametrisiert.*

Beweis : Œ ist c durch die Bogenlänge parametrisiert, d.h. $[a,b]=[0,L]$, $\|\dot{c}(t)\|_2 = 1$, $\gamma_i(t) := c_i(L\cdot t)$. Diese Funktionen haben eine Fourier-Reihe

$$
\begin{aligned}
\gamma_i(t) &= \sum_n \hat{\gamma}_i(n)\chi_n(t) \\
\dot{\gamma}_i(t) &= \sum_n 2\pi i n \hat{\gamma}_i(n)\chi_n(t).
\end{aligned}
$$

Nach der Parsevalschen Gleichung ist

$$\big\|\dot{\gamma}(t)\big\|_2^2 = L^2\big\|\dot{c}(Lt)\big\|_2^2 = L^2 = \int_0^1 \big\|\dot{\gamma}(t)\big\|_2^2 dt = 4\pi^2\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\big\|\hat{\gamma}(n)\big\|_2^2.$$

Nach Stokes ist

$$\mathrm{vol}(\overline{\mathrm{Int(c)}}) = \int_c (\overset{\vee}{x}|dx) = 2\pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\overline{\hat{\gamma}_1(n)} \cdot \hat{\gamma}_2(n),$$

folglich

$$L^2 - 4\pi\mathrm{vol}(\overline{\mathrm{Int(c)}}) = \sum_{n\geq 1} \big\{ |n\hat{\gamma}_1(n) + i\hat{\gamma}_2(n)|^2 + |n\hat{\gamma}_1(-n) - i\hat{\gamma}_2(-n)|^2 + 2(n^2-1)|\hat{\gamma}_2(n)|^2 \big\},$$

d.h.

$$L^2 - 4\pi\mathrm{vol}(\overline{\mathrm{Int(c)}}) \geq 0.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\hat{\gamma}_i(n) = 0$ für alle $|n| \geq 2$ und $\hat{\gamma}_1(1) = -i\hat{\gamma}_2(1)$. In diesem Fall ist $\big(\gamma_1(t) - \hat{\gamma}_1(0)\big)^2 + \big(\gamma_2(t) - \hat{\gamma}_2(0)\big)^2 = 4 \cdot \big|\hat{\gamma}_2(1)\chi_1(t)\big|^2 = \Big(\frac{L}{2\pi}\Big)^2$, d.h. $t \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ parametrisiert einen Kreis um $\big(\hat{\gamma}_1(0), \hat{\gamma}_2(0)\big)$ mit Radius $\frac{L}{2\pi}$.

□